

Análisis de teoría de juegos en cadenas de suministros de dos niveles, productor-comprador, bajo esquema vendor managed inventory (vmi)

Marcela Villa Marulanda

MSc. en Ingeniería Industrial, Universidad de los Andes
Docente Asistente, Investigador Grupo MYOS,
Universidad Pontificia Bolivariana
Bucaramanga, Colombia
marcela.villa@upb.edu.co

José Fidel Torres Delgado

PhD. Automática Informática Industrial, Université de Toulouse Iii,
Docente Asociado, Investigador Grupo PYLO,
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
ftorres@uniandes.edu.co

Resumen— Durante la última década se han desarrollado una gran diversidad de modelos y estrategias de coordinación en cadenas de suministro, una de las cuales se denomina Vendor Managed Inventory (VMI). Pese a los esfuerzos por lograr una coordinación entre los actores, en algunas ocasiones sucede que cada uno conserva sus intereses o restricciones, lo que impediría la implementación de un acuerdo o estrategia integral de coordinación. Se analiza mediante teoría de juegos una cadena de suministros, compuesta por un productor (con tasa finita de producción) y un comprador (cuya demanda es una constante conocida), quienes han acordado una estrategia VMI bajo dos escenarios: VMI Cooperativo y VMI No Cooperativo. Se propone un modelo de negociación para el que el agente que gana en la negociación pueda incentivar económicamente al otro, quien pierde con el acuerdo, con el fin de que pueda adoptarlo. Se realiza un análisis de sensibilidad de los modelos planteados con el propósito de hallar los beneficios que los agentes pueden obtener en términos de ahorros en costos de inventarios y cómo son distribuidos entre dichos agentes. Los resultados del estudio mostraron que, bajo las condiciones y los parámetros establecidos, el modelo VMI Cooperativo siempre favoreció al productor, lo que no sucedió con el comprador. No obstante, fue posible que el comprador ganara con el modelo VMI Cooperativo en su punto óptimo o mediante el incentivo económico que proporciona el modelo de negociación.

Palabras clave— Integración de la cadena de suministros, Teoría de Juegos, Inventario Administrado por el Proveedor, VMI.

Abstract— During the last decade, several models and strategies of coordination in supply chains have been developed, one of which is known as the Vendor Managed Inventory model (VMI). Despite the coordination efforts between the actors, sometimes it turns out that each one retains its restrictions and interests, which would preclude an integral implementation of the coordination strategy or agreement. A game theory based analysis approach is proposed for a supply chain comprising a producer (with a finite production rate) and a buyer (with known and constant demand), who have a VMI strategy, under two scenarios: Cooperative VMI and Non Cooperative VMI. A negotiation model where the one who gets more benefits can stimulate to the other agent who

loses with agreement is proposed as well. A sensitivity analysis of the models has been performed in order to find the benefits to be gained in terms of savings in inventory costs and how these are distributed among the agents. The study results showed that under certain conditions and parameters, the VMI Cooperative model always favored the producer which did not happen with the buyer. However, the buyer may benefit from the VMI Cooperative model in its optimal point or by means of the economic incentive provided by the producer as a set in a bargaining model.

Keywords— Game Theory, Supply Chain Integration, Vendor Managed Inventory, VMI.

INTRODUCCIÓN

La administración de una cadena de suministros comprende, dentro de su concepto, la coordinación de los agentes o actores involucrados en ella para planear y controlar el flujo de producto e información, con el fin de lograr eficiencias en costos y ganar competitividad en un mundo, cada vez, más globalizado. Esto implica que los agentes compartan información y/o tomen decisiones en conjunto, lo que hace necesario la implementación de tecnologías de la información para que soporten esta práctica. Por lo anterior, se han desarrollado modelos o estrategias de integración o coordinación a lo largo de la última década, los cuales han demostrado que resultan efectivos en la maximización de los beneficios del sistema [8].

Una de estas estrategias de integración o coordinación es la que se denomina como Inventario Administrado por el Proveedor o VMI (por sus siglas en inglés: *Vendor Managed Inventory*). Según Yao, Dong y Dresner [38], el enfoque VMI se define como una relación entre los vendedores y los compradores mediante la cual los compradores acuerdan permitirle al vendedor administrar

sus decisiones de inventario y reabastecimiento. La utilización de este sistema ha crecido en la industria en los últimos años. Las evidencias de estudios anteriores han demostrado que este enfoque puede mejorar el desempeño de la cadena de suministros al permitir disminuir los niveles de inventario. Los investigadores han demostrado que el enfoque VMI funciona mejor comparado con los sistemas tradicionales de la cadena de suministros y la respuesta 'Justo a Tiempo' al comparar funciones de costo o utilidad [3], sin embargo, para lograr la efectividad de esta herramienta y sus consecuentes beneficios, es necesario que exista una completa integración tal como lo comprobó Dong y Xu [10].

Yu, Huan y Liang [42], afirman que en una cadena de suministros puede existir a la vez una combinación de cooperativismo (optimización conjunta) y competencia (optimización individual), situación que se ha dado en acuerdos exitosos de VMI de casos reales tales como *Wal-Mart y Procter & Gamble; Dell, HP & ST Microelectronics;* y el sistema de distribución de Barilla en Europa. Estos autores abordan el problema al asumir que tanto el productor como el comprador optimizan conjuntamente los costos de inventario pero individualmente sus utilidades.

La dificultad para generar confianza entre los actores constituye una de las mayores barreras para el éxito de VMI [16]. Inclusive, si la información necesaria está disponible, los actores de la cadena pueden ser reticentes a revelar información debido a la falta de confianza y el temor a que la información sea revelada a sus competidores. La confianza es una condición que subyace al ideal de integración o coordinación. Por otra parte, a cada agente, desde su punto de vista local, le conviene conservar sus restricciones e intereses, que podrían generar un conflicto e impedir la implementación de una estrategia de integración o coordinación. Además, una política de inventarios EOQ (*Economic Order Quantity*) resulta conveniente para el comprador más que para el productor y de igual manera, una política ELS (*Economic Lot Size*) favorece más al productor que al comprador [20]). Estas razones configurarían la posibilidad de la no-cooperación entre los agentes de una cadena de suministros, donde cada uno puede asumir el rol de líder o seguidor. La teoría de juegos se ha usado extensamente en la literatura para

analizar la interacción de las firmas que integran una cadena de suministros [14] pues es una herramienta objetiva para soportar el proceso de toma de decisiones en esta clase de escenarios.

El presente trabajo se enfoca en analizar una cadena de suministros de dos niveles (vendedor-comprador) que trabajan con la estrategia VMI, bajo posibles ambientes de cooperación y de no-cooperación, con el fin de hallar cómo se podrían obtener beneficios y de qué manera estos se distribuyen entre los agentes que la conforman. El proveedor es un productor que tiene como parámetro la tasa de producción y el comprador se comporta con una demanda conocida y constante.

Este trabajo contribuye con un análisis de sensibilidad por medio del cual se demostró que el productor siempre gana con el modelo VMI Cooperativo, por tanto, es necesario que éste incentive, en términos económicos, al comprador para que adopte dicho modelo. Este incentivo se calculó mediante un modelo de negociación.

En la parte II de este artículo se relacionan detalladamente las investigaciones realizadas, agrupadas en dos categorías según el enfoque: Inventario Administrado por el Proveedor (VMI) y Teoría de Juegos combinado con VMI. La parte III contiene los supuestos generales de los modelos, los parámetros y las variables de decisión que conforman las funciones objetivo de los agentes. En la parte IV se definen los modelos VMI analizados, a saber, el VMI Cooperativo y el VMI No Cooperativo, a los cuales se les realiza un análisis de sensibilidad, que es presentado en la parte V, con el fin de determinar los beneficios que obtendrían los agentes por la adopción de alguno de estos modelos y además, se plantea el modelo de negociación. Finalmente, en la parte VI se concluyen los hallazgos de la investigación.

II. ENFOQUES UTILIZADOS PARA EL ESTUDIO DE CADENAS DE SUMINISTROS EN LA LITERATURA

A. Inventario Administrado por el Proveedor (VMI)

El enfoque VMI es una relación mediante la cual los vendedores acuerdan con los compradores monitorear el comportamiento de la demanda para facilitar la administración de las decisiones

de inventario y reabastecimiento. Los artículos relacionados a continuación evidencian, bajo múltiples escenarios, las ventajas que puede tener la implementación de VMI.

Torres y Ballesteros [30] analizan el esquema de coordinación en una cadena de suministros conformada por un productor y un comprador, para lo cual tienen en cuenta la tasa de producción dentro de los parámetros del modelo que, a su vez, se basa en el modelo propuesto por Yao, Evers y Dresner [39] quienes realizan un análisis con respecto al efecto que tienen los parámetros importantes de una cadena de suministros sobre los ahorros en costos si se implementan iniciativas de colaboración tales como VMI. Los resultados del modelo mostraron que los beneficios de la integración, en términos de reducción de costos de inventario, son posibles según la razón entre los costos de ordenar del proveedor al comprador y la tasa de los costos de manejo de inventario del proveedor al comprador. Yang, Ng y Cheng [37] evalúan los efectos de un centro de distribución en un sistema VMI que comprende un productor, un distribuidor y n minoristas. Proponen un modelo para evaluar el desempeño del sistema consideran la escala de la red de distribución, los factores influyentes en los costos, la distribución de la demanda, el horizonte de planeación y la localización de instalaciones. Arora, Chan y Tiwari [3] trabajaron un modelo con demanda aleatoria y una cadena de tres niveles: un productor, 4 distribuidores y n minoristas. Utilizan dos medidas de comparación: el nivel de servicio al cliente final y el costo total de la cadena para comparar las ventajas de incorporar una estrategia VMI en una cadena con respecto a una cadena tradicional que carezca de dicha estrategia. Darwish & Odah [10] desarrollan un modelo para la cadena con un vendedor y múltiples compradores, con restricciones de capacidad. Además, crean un algoritmo para encontrar la solución óptima global y asumen que en un sistema VMI los compradores están exentos del costo de ordenar, la demanda es determinista y el costo del transporte está implícito en el costo de ordenar. Yao, Dong y Dresner [38] hacen un análisis con rigor estadístico e indican cómo un vendedor (socio 'aguas arriba' de la cadena), puede ofrecer un incentivo para implementar VMI con su comprador (socio 'aguas abajo' de la cadena) a fin de reducir las ventas perdidas por agotamiento

de inventario y de lograr un beneficio para ambas partes. Kwak, Choi, Kim y Kwon [22] proponen un modelo VMI adaptativo que controla la cantidad de reabastecimiento que se ajusta según el cambio en la demanda del cliente en cada período de reabastecimiento de una cadena de dos niveles con demandas finales inestables, consideran un vendedor y un comprador. Vlist, Kuik y Verheijen [33] toman los modelos de Yao, Evers y Dresner [39], le incluyen los costos de transporte y modifican los supuestos del flujo de inventario. Zhang, Liang y Yu [44] modelan un sistema integrado VMI con un vendedor y múltiples compradores. Consideran un costo conjunto con una producción constante y tasas de demanda bajo el supuesto que los ciclos de orden del comprador pueden ser diferentes y cada comprador puede reabastecer más de una vez en un ciclo de producción, en la cual la decisión de inversión es también considerada. Presentan tres ejemplos numéricos con una función de costo de ordenar exponencial. Lee y Chu [18] analizan si en un ambiente de inventarios con demanda incierta y único período (que se modela como el vendedor de periódicos) resulta atractivo implementar estrategia VMI, para lo cual comparan los valores esperados de los agentes con la implementación y sin ella. Choi, Dai y Song [7] combinan el nivel de servicio y el valor esperado de 'back orders' en una función lineal para medir el desempeño de la cadena de suministros bajo el esquema VMI. Dong y Xu [10] evalúan cómo VMI afecta un eslabón de la cadena y afirman que esta estrategia siempre conduce a un mayor beneficio para el comprador pero para el vendedor esto puede variar. Modelan una cadena de un comprador y un vendedor y los resultados demuestran que VMI genera beneficios si hay una completa integración. Lee, So y Tang [19] analizan modelos matemáticos para una cadena de un proveedor y un comprador con demanda aleatoria y de los resultados obtenidos y comparan los beneficios de implementar estrategias de intercambio de información, una de las cuales es VMI.

Algunos autores utilizan la herramienta de simulación para sus análisis: Ofuoku [21] usa simulación de eventos discretos para comparar los costos óptimos totales obtenidos para una cadena con VMI y sin VMI. White y Censlive (2006) [34] consideran un modelo de sistema de control simple de VMI para administración de inventa-

rios de oleoductos y producciones bajo pedido y compara los resultados de un modelo discreto y uno continuo según el nivel de agregación y programación de la producción. Angulo, Nachtmann y Waller [2], a través de un modelo de simulación, probaron la importancia en cuanto a precisión y oportunidad de la información que comparten los integrantes de una cadena de suministros de cuatro niveles. Towill y Disney [31] miden el impacto en el efecto látigo de las cadenas para lo cual utilizan un modelo de simulación, específicamente para las actividades de orden de producción del productor. Yang, Ruben y Webster [36] simularon un sistema de distribución con VMI para determinar la influencia de 6 factores (variabilidad de la demanda, intervalo de revisión de inventario, número de minoristas, porcentaje de utilización de la capacidad de almacenamiento y flexibilidad de la producción) en el desempeño, en términos de nivel de inventarios, de la cadena de suministros.

En cuanto a soporte tecnológico para implementar VMI, Southard y Swenseth [28] demuestran empíricamente que si se implementa tecnología habilitada para un sistema VMI, los ahorros serán suficientes como para justificar la inversión requerida para ello. Para lo anterior, comparan los costos de inventario usados en la práctica por una cooperativa de fincas rurales. Los datos fueron utilizados para hallar la distribución de la demanda y utilizarla en modelos de simulación de demanda discreta de un sistema de entrega completamente cooperativo y convencional. Szmerekovsky y Zhang [29] consideran una cadena de suministros con RFID y sin RFID en un sistema VMI con un productor y un comprador. Derivan las políticas óptimas del productor, del comprador y del sistema como un todo. Establecen los lineamientos administrativos que resaltan la importancia de la disponibilidad de espacio y el costo de las etiquetas en determinar la rentabilidad de adoptar RFID. Mientras tanto, Kuk [16] prueba empíricamente cómo algunos de los aclamados beneficios de VMI están sujetos a algunas de las barreras comunes de cualquier implementación de tecnologías de la información e iniciativas de reingeniería, consideran como la mayor de estas barreras la generación de confianza entre los actores de la cadena. Los autores utilizan el método de las encuestas para su análisis con gran rigor estadístico en aras de la validez y la confiabilidad

de las medidas usadas en las pruebas de hipótesis.

Entre las aplicaciones del enfoque VMI en organizaciones se encuentran: una red de suministros de sangre de un hospital [13], en una industria alimentaria en Taiwan [32], y en una industria química [5].

Zavanella y Zanoni [43] trabajan una política particular de VMI conocida como 'Inventario en Consignación' (*Consignment Stock* -CS-), que consiste en que el vendedor es propietario del inventario incluso cuando permanece en las bodegas del comprador. Aplican el análisis a un caso industrial de un vendedor y múltiples compradores y muestran con los resultados cómo la política CS funciona mejor que una optimización sin coordinación. Gümü, Jewkes y Bookbin [12] analizan que bajo ciertas condiciones los inventarios en consignación (CI por sus siglas en inglés), generan beneficios para uno o más actores de la cadena. Demostraron que esta política puede beneficiar tanto al vendedor como al comprador de acuerdo a los costos de embarque y de quién asuma el costo de transporte. Cuando un acuerdo CI es ineficiente, resulta mejor combinarlo con estrategia VMI para lograr ahorros en ambos agentes del sistema.

Existen trabajos que afirman que hay estrategias mejores que VMI bajo ciertas condiciones: Song y Dinwoodie [27] comparan la política de administración óptima de inventarios integrada, desarrollada por teoría de programación dinámica, con políticas de inventario VMI y con una política tradicional de administración minorista de inventarios. Demostraron que en cadenas de suministros estocásticas, la política de administración óptima de inventarios integrada es mejor que las demás; Sari [24] compara las iniciativas CPFR y VMI con una cadena de suministros tradicional mediante simulación de Montecarlo y concluyen que se logran mayores ahorros en costos con CPFR.

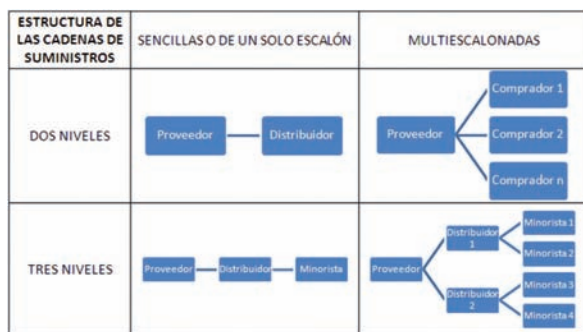
Finalmente, Holweg, Disney, Holmstrom y Smaros [15] estudian las experiencias, a lo largo de varias industrias y en diversos países, de las implementaciones de VMI, para demostrar que hasta la fecha los lentos progresos en esta materia pueden obedecer a la falta de sentido común de los conceptos de integración de la cadena, por cuanto no es fácil integrar la colaboración externa

con el control interno de la producción y los inventarios. Para explicar la dinámica de este comportamiento y sus características, utilizan la analogía del ‘tanque del agua’ y concluyen que la efectividad de la colaboración en una cadena de suministro reposa en dos factores: el nivel por el cual se integran interna y externamente las operaciones y el nivel por el cual los esfuerzos son alineados a la configuración de la cadena en términos de la dispersión geográfica, el patrón de la demanda y las características del producto.

B. Teoría de juegos combinado con VMI

En el análisis de teoría de juegos es importante el número de jugadores o agentes que toman decisiones interactivas, por tal razón, los artículos referidos se agrupan según la estructura de las cadenas de suministros bajo esquema VMI. La estructura de una cadena de suministros se define por los niveles a lo largo de ésta y los escalones en cada nivel. El primero alude a la cantidad de agentes que conforman toda la cadena de abastecimiento. El segundo indica la cantidad de agentes que hay en cada nivel y cumplen prácticamente la misma función dentro de la cadena de abastecimiento. Para ilustrar lo anterior, en la Fig. 1 se ilustran ejemplos de cadenas sencillas o de un solo escalón y de cadenas con múltiples escalones, cada una de diferentes niveles.

Fig. 1. EJEMPLOS DE CADENAS DE SUMINISTROS SEGÚN SU ESTRUCTURA



1) Cadenas sencillas de dos niveles (1 proveedor – 1 comprador)

Ru y Wang [23] trabajan modelos bajo el esquema ‘inventario en consignación’, y comparan dos acuerdos: inventario en consignación manejado por el comprador (RMCI) y el inventario en consignación manejado por el vendedor (VMCI). Construyeron un modelo de teoría de juegos para capturar las interacciones entre un vendedor y

un comprador cuando diferentes grupos tienen el control del inventario en la cadena de suministros. Savasanelil y Erikp [26] modelaron un productor (con restricción de capacidad) y un minorista basados en la teoría de juegos, asumen que la información de la demanda del minorista está completamente disponible para el productor, por lo tanto, estudiaron los beneficios más allá del intercambio de información, tanto en un sistema de consignación como el de no consignación bajo el esquema VMI. Bylka [4] asume que la división de los costos de transporte es centralmente coordinado o inicialmente negociado en un modelo determinístico discreto en el cual el vendedor produce un producto y lo supe al comprador. Esto conduce a una clase de juego no-cooperativo restringido, indexado por dos parámetros conectados con partes de los costos de transporte. Yu, Chu y Chen [41] discuten cómo el vendedor puede aprovechar la información que captura del comprador para incrementar su propio beneficio mediante un juego Stackelberg en un sistema VMI. El vendedor es un productor que consigue materias primas para producir artículos terminados y suministrarlos al mismo precio mayorista para múltiples compradores. Los compradores venden a precios de mercado independientes.

2) Cadenas multiescalonadas de dos niveles (1 proveedor – N compradores)

Chen, Lin y Cheng [6] se ocupan del problema de coordinación de un sistema verticalmente separado bajo acuerdos VMI y en consignación. Formulan un problema de maximización de la ganancia y desarrollan el análisis de equilibrio bajo esquemas cooperativos y no-cooperativos, de un vendedor y múltiples compradores, bajo esquemas: precio único del vendedor, VMI y VMI en consignación. Wong, Qi y Leung [35] modelan una cadena de dos niveles con un vendedor y múltiples compradores bajo un esquema VMI. Analizan dos escenarios para los compradores: independientes con una función de demanda sensible sólo a su propio precio y competitivos con una función de demanda que depende de los precios de todos los compradores. Consideran una demanda aleatoria sensible al precio de venta, bajo el esquema del vendedor de periódicos y VMI, donde el vendedor estimula al comprador con un reembolso para que éste incremente las ventas. Yu, Zeng y Zhao [40] muestran cómo analizar el mecanismo evolu-

tivo intrínseco del VMI en cadenas de suministro y aplican un enfoque evolutivo de teoría de juegos. Yu, Huang y Liang [42] analizan la interacción del productor con los minoristas donde cada cual optimiza individualmente sus beneficios, ajusta sus estrategias de publicidad y precio y sus políticas de inventario en un ambiente VMI. Modelan con un solo producto para varios minoristas. Consideran la tasa de la demanda para cada minorista como una función creciente y cóncava en términos de las inversiones en publicidad, pero decreciente y convexa en términos de los precios minoristas. El problema es modelado como un juego Stackelberg donde el productor es el líder y los minoristas son los seguidores. Proponen un algoritmo para buscar el equilibrio de Stackelberg.

III. NOTACIÓN Y SUPUESTOS GENERALES DE LOS MODELOS PARA EL ANÁLISIS DE UNA CADENA DE SUMINISTROS

La cadena de suministros que se analizará tiene una estructura de dos niveles y un solo escalón, conformada por un productor y un comprador que tienen un acuerdo bajo el esquema VMI. Cuando existe un acuerdo VMI, el productor determina la cantidad a despachar y la frecuencia de los despachos hacia el comprador, por tanto, el comprador recibe el pedido cada período sin necesidad de llamar o solicitar al proveedor su despacho.

Los modelos planteados son una extensión de los modelos propuestos por Torres y Ballesteros [30], quienes comparan los costos totales de inventarios en cadenas de suministros de estructura 1 productor y 1 comprador con acuerdo VMI y sin él. Ellos se basan en el análisis realizado por Yao, Evers y Dresner [39], sólo que el proveedor, en lugar de ser un vendedor, es un productor con tasa finita de producción.

Los supuestos generales tenidos en cuenta para analizar la cadena de suministros son:

- La demanda y la tasa de producción son parámetros conocidos y constantes.
- No se permiten faltantes, por consiguiente, la tasa de la demanda (R) es menor o igual que la tasa de producción (P).
- El costo de mantener inventario del comprador (h) es mayor que el costo de mantener inventario del productor (H), en razón al valor agregado a lo largo de la cadena.

En la Tabla I y la Tabla II se definen las variables de decisión y los parámetros de los modelos matemáticos.

TABLA I
VARIABLES DEL MODELO

Símbolo	Definición
q	Cantidad de producto que el proveedor despacha al comprador
k	Constante de coordinación o frecuencia de abastecimiento durante un ciclo del productor (número de veces que el productor despacha q unidades al comprador)
Q	Cantidad total producida por ciclo del proveedor

TABLA II
PARÁMETROS DEL MODELO

Símbolo	Definición
CM	Costo de ordenar para el proveedor (\$/orden)
cc	Costo de ordenar para el comprador (\$/orden)
H	Costo de mantener para el productor (\$/(unidad*tiempo))
h	Costo de mantener para el comprador (\$/(unidad*tiempo))
R	Tasa de demanda del comprador (unidades/tiempo)
P	Tasa de producción del productor (unidades/tiempo)
g	Fracción de costos de ordenar entre el productor y el comprador
d	Fracción de costos de mantener entre el productor y el comprador
δ	Fracción de tasa de demanda y tasa de producción

A. Función Objetivo

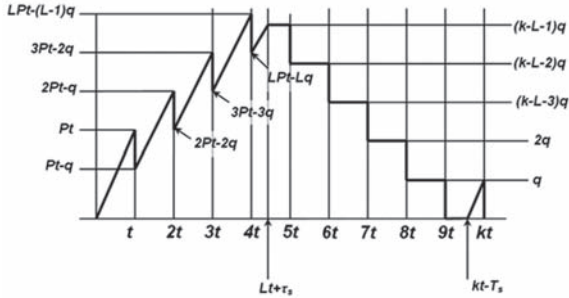
1) Productor

Cuando existe un acuerdo VMI, el productor determina la cantidad y la frecuencia de los pedidos hacia el comprador, por tanto, se calcula una constante de coordinación, k (veces), que consiste en el número de ciclos del comprador contenidos en un ciclo del productor, kt (tiempo), es decir, que el ciclo de inventarios del productor es un múltiplo del ciclo de inventarios del comprador, t (tiempo). En la Fig. 2 se observa el inventario promedio del productor, I_p (unidades), cuya ecuación se determina como el área bajo la curva dividida entre el

tiempo de ciclo total, lo que resulta en (ver apéndice A):

$$I_p = \frac{Q \left[\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right]}{2k} \quad (1)$$

FIG. 2. NIVELES DE INVENTARIO DEL PRODUCTOR EN UN CICLO



Fuente: Torres y Ballesteros

El costo total de inventario (costo de ordenar + costo de mantener) se calcula así:

$$CT_p = \frac{C_M R}{Q} + H I_p \quad (2)$$

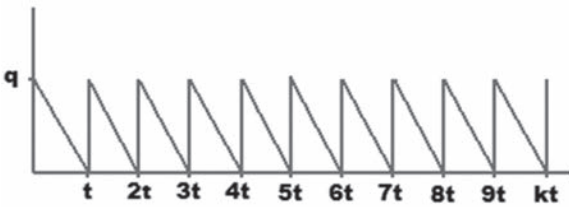
Al reemplazar (1) y $Q=kq$ en la ecuación (2), se obtiene el costo total de inventario del productor así:

$$CT_p = \frac{C_M R}{kq} + \frac{1}{2} H q \left(\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) \quad (3)$$

2) Comprador

El comprador recibe del productor q unidades cada tiempo t . Al multiplicar este último por k , se obtiene el tiempo de ciclo del productor, tal como se muestra en la Fig. 3.

FIG. 3. NIVELES DE INVENTARIO DEL COMPRADOR EN K CICLOS



Fuente: Autores

Por lo anterior, el inventario promedio del comprador se establece como $I_c = \frac{q}{2}$ y el costo total de los inventarios (costo de ordenar + costo de mantener) es:

$$CT_c = \frac{hq}{2} + \frac{C_c R}{q} \quad (4)$$

3) Cadena de suministros (productor y comprador)

El costo total de la cadena de suministros es igual a la suma de los costos de todos los agentes involucrados, $CT_{Cad} = CT_c + CT_p$. Para el caso se tiene la suma de (3) y (4):

$$CT_{Cad} = \left[\frac{hq}{2} + \frac{C_c R}{q} \right] + \left[\frac{C_M R}{kq} + \frac{1}{2} H q \left(\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) \right] \quad (5)$$

IV. DEFINICIÓN DE LOS MODELOS VMI COOPERATIVO Y NO COOPERATIVO

Acorde con lo anunciado en la parte II, un acuerdo VMI consiste en una estrategia mediante la cual los agentes de la cadena de suministros comparten información relacionada con la demanda para conceder la coordinación de los niveles de inventarios del comprador hacia el productor. La teoría de juegos permite analizar las condiciones de equilibrio cuando los negociantes cooperan o no, a fin de lograr ganancias o ahorros conjuntos o individuales. Como se menciona en Yu, Chu y Chen [41], un acuerdo VMI tiene dos características principales: (I) se enfoca en la administración integrada del inventario por parte del vendedor (productor) con la cooperación de sus compradores, (II) el vendedor (productor) tiene la facultad de conocer el nivel de inventario de sus compradores y la demanda directamente (no mediante pedidos del comprador). Según ellos, la primera característica otorga cierto grado de autonomía y la segunda, le permite al vendedor (productor) anticiparse a las decisiones óptimas de sus compradores. Entonces, un acuerdo VMI integra las decisiones de inventarios de los agentes pero no les resta su autonomía. Las políticas de inventarios impactan los costos de mantener y de ordenar y ambos agentes tienen el mismo interés en reducirlos, por tanto, la decisión integrada podría amenazar la optimización de estos costos a alguno de los agentes.

Dado todo lo anterior, se considerarán los costos totales de inventario de la cadena. Los agentes están involucrados en la producción y distribución de un solo tipo de producto terminado, es decir, se enfoca en el inventario que se transfiere del productor al comprador mas no en los concer-

nientes a la materia prima del productor. Se examinarán dos formas de interacciones en lo que respecta a la función objetivo (costos totales de inventario) de los agentes: VMI Cooperativo y VMI No Cooperativo.

Cuando hay un acuerdo 'VMI Cooperativo', el costo total se optimiza conjuntamente y ambos actores adoptan los valores que resulten de las variables. Para este caso, se trabaja el modelo cooperativo propuesto por Esmaeili, Aryanezhad y Zeepongsekul [11], quienes optimizan la suma ponderada de las funciones objetivo de los agentes para obtener las variables de decisión contenidas en la curva de Eficiencia de Pareto.

Por otro lado, en un acuerdo 'VMI No Cooperativo', tanto el productor como el comprador optimizan sus costos de inventarios según los valores de las variables convenientes para cada uno, pero llegan a un equilibrio en el que ambos se benefician (Stackelberg). En este último caso, el comprador decidiría las cantidades ordenadas al productor (q) y, fundamentado en ello, el productor decide la constante de coordinación (k), ambos basándose en los valores de las variables que imponga el agente que sea líder. Se propone un modelo de negociación por medio del cual se determina el valor de un incentivo que el agente ganador, con la adopción del modelo cooperativo, pueda otorgar al agente que menos se beneficia por el acuerdo.

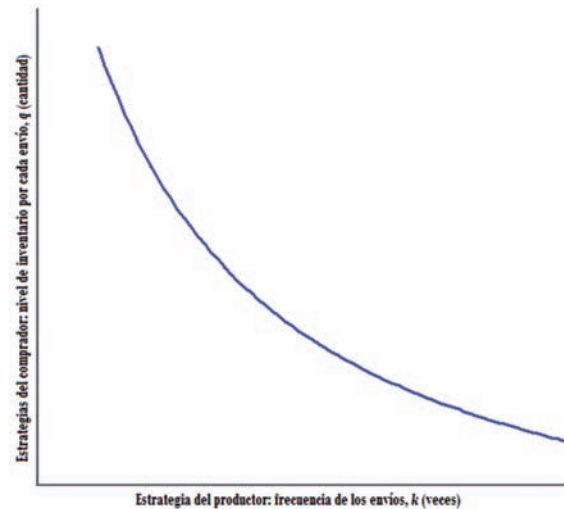
A. VMI Cooperativo

Acorde con lo afirmado por Yao, Evers u Dresner [39], la consecuencia de un acuerdo VMI es que el productor tiene un conocimiento directo de la demanda del comprador (no mediante los pedidos que éste haría) y es el responsable de decidir los niveles de inventario a lo largo de la cadena. Por lo anterior, el objetivo de un modelo cooperativo es optimizar los costos totales de la cadena de suministros.

Para el análisis, esta sección se enfoca en el juego cooperativo propuesto por Esmaeili, Aryanezhad y Zeepongsekul [11] quienes maximizan una función de utilidad. Otros autores como Abad y Jaggi [1] y Sarmah, Acharya y Goyal [25] trabajan de manera similar el modelo cooperativo. Para el modelo de costos de inventarios planteado, se trata de hallar la combinación de estrategias del productor (valor de k) y del comprador (valor de

q) que conforman las soluciones 'Eficientes de Pareto', definidas como el conjunto de soluciones en las cuales ningún otro conjunto de soluciones beneficiaría a ambos jugadores, es decir, se refiere al perfil de estrategias que corresponden a la eficiencia social, relevante para el grupo de jugadores [22], tal como se observa en la Fig. 4.

Fig. 4. FRONTERA EFICIENTE DE PARETO



Fuente: los autores

Para lograrlo se buscan los valores de q y k que minimizan la suma ponderada de las funciones objetivo de los dos agentes:

$$CTPCop_{cost} = (1-\lambda) \left[\frac{hq}{2} + \frac{C_c R}{q} \right] + \lambda \left[\frac{C_M R}{kq} + \frac{1}{2} Hq \left(\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) \right] \quad (6)$$

Entonces, (6) se deriva con respecto a k y q y al igualar a cero se obtiene:

$$k_{cop}^*(q) = \sqrt{\frac{2C_M R}{Hq^2 \left(1 - \frac{R}{P} \right)}} \quad (7)$$

$$q_{cop}^*(\lambda) = \sqrt{\frac{2R_c (1-\lambda)}{h(1-\lambda) + \lambda H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)}} \quad (8)$$

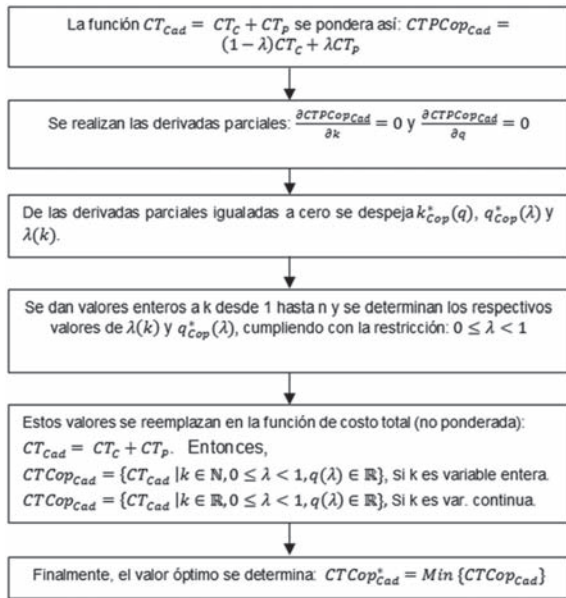
$$Q_{cop}^* = \sqrt{\frac{2C_M R}{H \left(1 - \frac{R}{P} \right)}} \quad (9)$$

Se observa que q_{cop}^* queda en términos del factor λ , el cual oscila entre 0 y 1. Para hallar el valor de λ en términos de k , se igualan los q de (7) y (8):

$$\lambda(k) = \frac{C_c H \left(1 - \frac{R}{P}\right) k^2 - h C_M}{C_M H \left(\frac{2R}{P} - 1\right) - h C_M + C_c H \left(1 - \frac{R}{P}\right) k^2} \quad (10)$$

Basados en la metodología utilizada por Esmaeili, Aryanezhad y Zeepongsekul [11], al dar un valor de k (entero) se obtiene un valor de λ que sirve para calcular q . Los valores de λ que sean negativos o mayores que 1, no se consideran en la función objetivo, por consiguiente, los correspondientes valores de k y de q se descartan del conjunto de soluciones eficientes de Pareto. Entonces, el valor de k y de q que minimizan la función objetivo del modelo cooperativo (6), con un $0 \leq \lambda < 1$, se halla mediante 'grid search', es decir, se determina el valor de la función objetivo y de las demás variables (q y λ) en cada punto de la 'grilla' de un conjunto de valores enteros de k . El anterior procedimiento se detalla en la Fig. 5.

Fig. 5. METODOLOGÍA DEL MODELO COOPERATIVO BASADO EN ESMAEILI, ARYANEZHAD Y ZEEPHONGSEKUL



Fuente: los autores

En el apéndice se demuestra que el modelo VMI Cooperativo es óptimo cuando $\lambda = \frac{1}{2}$. Entonces, el costo total óptimo de la cadena es:

$$CTPCop_{cad}^* = \sqrt{2R} \left(\sqrt{C_M H \left(1 - \frac{R}{P}\right)} + \sqrt{C_c \left(h + H \left(\frac{2R}{P} - 1\right)\right)} \right) \quad (11)$$

B. VMI No Cooperativo

En el modelo No Cooperativo, cada agente optimiza sus costos de manera individual con conocimiento de las posibles estrategias que dispone el otro agente para optimizar los suyos. Aquí no se acuerda la optimización conjunta de los costos totales de la cadena, sino que cada uno y según quien domine, tratará de imponer el valor de la variable de decisión que más convenga a su función objetivo.

Un ejemplo de este escenario lo analizan Ru y Wang [23], quienes trabajan modelos bajo el esquema 'inventario en consignación' y comparan dos acuerdos: inventario en consignación manejado por el comprador (RMCI) y el inventario en consignación manejado por el vendedor (VMCI).

Estos autores construyeron un modelo de teoría de juegos para capturar las interacciones entre un vendedor y un comprador cuando las decisiones son centralizadas (Cooperativas) o descentralizadas (No Cooperativas).

Las decisiones que toman los agentes individualmente se asumen de manera secuencial, es decir, primero el líder impone su valor de variable de decisión y luego el seguidor optimiza sus costos y toman como parámetro dicho valor. Este tipo de juego se denomina *Stackelberg* y su respectiva solución es el equilibrio de *Stackelberg* [25].

Cuando el productor domina, el comprador optimiza CT_c (4) se considera el valor de k que decide el productor. Por lo anterior, se deriva (4) con respecto a q , lo que resulta:

$$q_{NoCop}^* = \sqrt{\frac{2RC_c}{h}} \quad (12)$$

Se puede observar que este valor, para el comprador, no depende de k , por consiguiente, si el productor es quien domina, podría hacer desviar al comprador de esta decisión.

Cuando es el comprador quien domina, el productor optimiza CT_p (3) se considera el valor de q que decide el comprador. Por lo anterior, se deriva (3) con respecto a k , lo que resulta:

$$k_{NoCop}^*(q) = \sqrt{\frac{2C_M R}{Hq^2 \left(1 - \frac{R}{P}\right)}} \quad (13)$$

En condiciones de equilibrio para ambos jugadores, el valor de q y de k se obtiene de la inter-

sección de las funciones individuales. Entonces, se reemplaza q_{NoCop}^* (12) en k_{NoCop}^* (13) y resulta (14). Al multiplicar (12) y (14) da como resultado (15), el mismo valor de Q obtenido en el cooperativo (9).

$$k_{NoCop}^* = \sqrt{\frac{hC_M}{C_c H \left(1 - \frac{R}{P}\right)}} \quad (14)$$

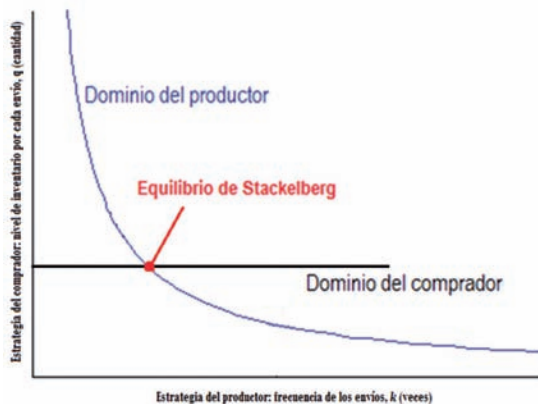
$$Q_{NoCop}^* = \sqrt{\frac{2C_M R}{H \left(1 - \frac{R}{P}\right)}} \quad (15)$$

En la Fig. 6. se observa una intersección que corresponde al equilibrio de Stackelberg cuando alguno de los agentes domina.

Los valores óptimos (12) y (14), en condición de equilibrio, al ser reemplazados en la ecuación (5) se obtiene el óptimo VMI No Cooperativo para la cadena:

$$CTNoCop_{Cad}^* = \sqrt{2R} \left(\sqrt{C_M H \left(1 - \frac{R}{P}\right)} + \sqrt{C_c h} + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{C_c}{h}} \right) \quad (16)$$

Fig. 6. EQUILIBRIO DE STACKELBERG EN UN JUEGO NO COOPERATIVO



Fuente: los autores

V. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS MODELOS

En esta parte se trabaja un ejemplo numérico por medio del cual se fijan los valores de los parámetros relacionados en la Tabla III. Es de observar que el costo de mantener del comprador h es mayor que el costo de mantener del productor H , porque en la medida en que el producto fluye a través de la cadena de suministros, éste adquiere valor. Para el caso de los costos de ordenar sucede lo contrario, ya que por lo general, estos son mayores para un fabricante (productor) que para

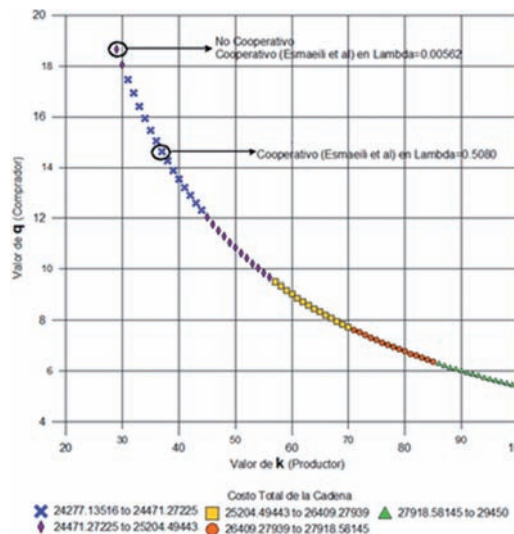
un distribuidor (comprador). Se supone que no se permiten faltantes, por tanto, la tasa de demanda R siempre será menor o igual que la tasa de producción P . La constante de coordinación k es un valor entero mayor o igual que 1 y hasta el momento, las fórmulas para hallarlo en todos los modelos lo consideran continuo. En esta sección se estudia lo que sucede cuando k toma valores enteros.

En la Fig. 7 se relaciona la curva o frontera de soluciones eficientes de Pareto con sus respectivos rangos de valores de la función de objetivo (5). Estos se obtuvieron mediante la asignación de valores enteros a la variable k para encontrar su correspondiente valor de q , sí y sólo sí $0 < \lambda < 1$ (procedimiento relacionado en la Fig. 4 de la sección IV-A).

TABLA III
VALORES DE LOS PARÁMETROS

Parámetro	Valor	Unidades
C_M	4000	\$/orden
C_c	70	\$/orden
H	300	\$/unidad*tiempo
h	400	\$/unidad*tiempo
R	1000	unidades/tiempo
P	1100	unidades/tiempo

Fig. 7. FRONTERA EFICIENTE DE PARETO CON COSTOS TOTALES DE LA CADENA DE SUMINISTROS



Fuente: los autores

Se puede observar que los valores de k y q del modelo Cooperativo que fueron iguales al modelo No Cooperativo (29 y 18.7, respectivamente), se obtuvieron con un $\lambda=0,00562$ y el valor de la función objetivo (5) fue de \$24.546. El modelo cooperativo alcanzó su optimización cuando $\lambda=0,5080$, con $k=37$ y $q=14.7$ y el valor respectivo

de la función objetivo (5) fue de \$24.277; acorde con lo establecido en la sección IV-B.

Basado en la metodología de Esmaeili et al. [11], se compararon el VMI Cooperativo y el VMI No Cooperativo en sus puntos óptimos para el análisis de sensibilidad, a fin de proponer una generalización de las diferencias entre ellos. Primero se examinaron los costos totales de la cadena y luego los costos totales para cada agente.

A. Ahorros en el costo óptimo total de la cadena

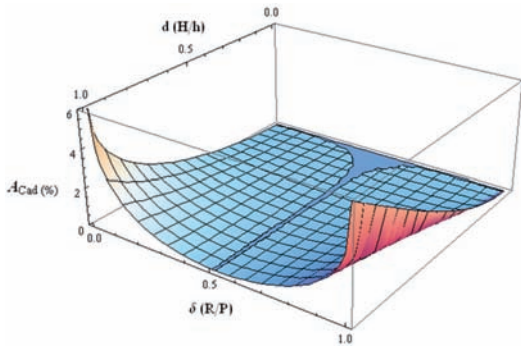
El objetivo de la fórmula (17) fue determinar el porcentaje de diferencia entre la función objetivo óptima del modelo VMI Cooperativo (11) y la del VMI No Cooperativo (16). Para simplificar la cantidad de variables y su dominio, se establecieron las siguientes relaciones: $g=C_M/C_C$, $d=H/h$ y $\delta=R/P$, cuyo resultado se expresa en la ecuación (17).

$$A_{Cad}(\%)[C_M, C_C, H, h, R, P] = \left(\frac{CTNoCop_{Cad}^* - CTCop_{Cad}^*}{CTNoCop_{Cad}^*} \right) * 100 \quad (17)$$

$$A_{Cad}(\%)[g, d, \delta] = \left(1 - \frac{\sqrt{1-\delta} + \sqrt{\frac{1}{g} \left(\frac{1}{d} + (2\delta-1) \right)}}{\sqrt{1-\delta} + \sqrt{\frac{1}{dg} + \sqrt{\frac{d}{g} \left(\delta - \frac{1}{2} \right)}}} \right) * 100 \quad (18)$$

La Fig. 8 proporciona la gráfica correspondiente a (18) en términos de d y δ , las cuales oscilan entre 0 y 1. La variable g tiene un comportamiento inverso a la función (18), es decir, en la medida en que ésta aumenta, el ahorro tiende a disminuir, puesto que la derivada parcial de (18) con respecto a g es negativa para cualquier combinación de d y δ .

Fig. 8. SENSIBILIDAD DE LOS AHORROS EN EL COSTO ÓPTIMO TOTAL DE LA CADENA ANTE CAMBIOS EN D Y DELTA



Fuente: los autores

Cuando $\delta=1/2$, la diferencia entre los dos modelos fue nula. Los ahorros se incrementaron con un δ superior o inferior a $1/2$ y con un d cercano a 1. Si la proporción de g cambiara de 57.1428 (4000/70) a 2 (4000/2000), por ejemplo, el ahorro máximo que podría obtenerse podría cambiar de 6% a 20% aproximadamente.

B. Ahorros en el costo óptimo total para el comprador

La función objetivo del comprador (4), en el modelo VMI Cooperativo en su valor óptimo (cuando $\lambda=0,5$), es equivalente a (19), que corresponde al costo total que asumiría este agente por adoptar el acuerdo.

$$CTCOP_{comp}^* = \sqrt{\frac{C_c R}{2}} \left(\frac{h}{\sqrt{H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)} + h} + \sqrt{H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)} + h \right) \quad (19)$$

En cambio, si el comprador fuera el líder o pudiera acordar con el productor la mejor estrategia individual bajo este esquema con el costo óptimo para él sería (20):

$$CTNoCop_{comp}^* = \sqrt{2C_c R h} \quad (20)$$

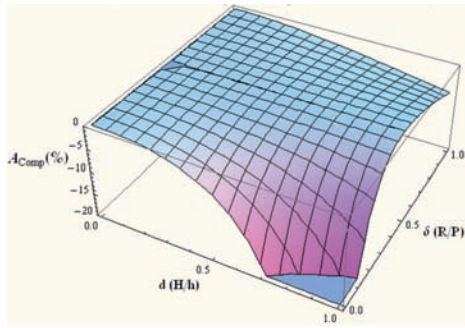
Para determinar las diferencias, se procedió como se hizo con el total de la cadena de suministros, sólo que esta vez se consideraron los costos totales del comprador:

$$A_{Comp}(\%)[C_c, H, h, R, P] = \left(\frac{CTNoCop_{comp}^* - CTCOP_{comp}^*}{CTNoCop_{comp}^*} \right) * 100 \quad (21)$$

$$A_{Comp}(\%)[d, \delta] = \left(1 - \frac{2 + d(2\delta-1)}{2\sqrt{1 + d(2\delta-1)}} \right) * 100 \quad (22)$$

Aquí los ahorros no dependen de las proporciones en el costo de ordenar (g). El modelo VMI Cooperativo nunca fue conveniente para el comprador. En $\delta=1/2$ al comprador le fue indiferente cualquiera de los modelos. El escenario empeoraba para este agente en la medida en que d tendía a 1 y δ a 0, tal como se ve en la Fig. 9.

Fig. 9. SENSIBILIDAD DE LOS AHORROS EN EL COSTO ÓPTIMO DEL COMPRADOR ANTE CAMBIOS EN D Y DELTA



Fuente: los autores

C. Ahorros en el costo óptimo total para el productor

De igual manera para el productor, las funciones objetivo óptimas tanto en el modelo VMI Cooperativo como en el VMI No Cooperativo (cuando $\lambda=0,5$), están dadas por (23) y (24), respectivamente.

$$CTCop_{Prod}^* = \sqrt{2C_M HR \left(1 - \frac{R}{P}\right) + \left(2 \frac{R}{P} - 1\right)} \sqrt{\frac{HRC_c}{2 \left(2 \frac{R}{P} - 1 + \frac{h}{H}\right)}} \quad (23)$$

$$CTNoCop_{Prod}^* = \sqrt{2C_M HR \left(1 - \frac{R}{P}\right) + H} \sqrt{\frac{C_c R}{2h} \left(2 \frac{R}{P} - 1\right)} \quad (24)$$

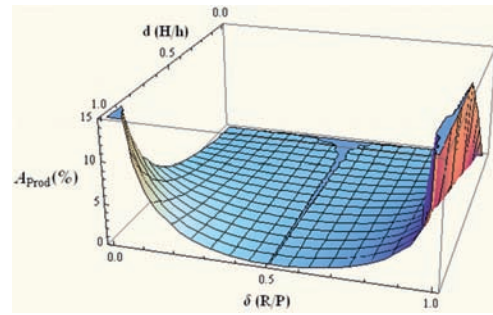
Para determinar las diferencias, se procedió de igual forma que con el del total de la cadena de suministros.

$$A_{Prod}(\%) [C_M, C_c, H, h, R, P] = \frac{CTNoCop_{Prod}^* - CTCop_{Prod}^*}{CTNoCop_{Prod}^*} \quad (25)$$

$$A_{Prod}(\%) [g, \delta, d] = \left(1 - \frac{\sqrt{2(1-\delta)} + (2\delta - 1) \sqrt{\frac{1}{2g \left(2\delta - 1 + \frac{1}{d}\right)}}}{\sqrt{2(1-\delta)} + \sqrt{\frac{d}{2g} (2\delta - 1)}} \right) * 100 \quad (26)$$

El comportamiento de los costos del productor fue similar al de la cadena (Fig. 8 y Fig. 10). Si la proporción de g cambiará de 57.1428 (4000/70) a 2 (4000/2000), por ejemplo, el ahorro máximo que podría obtenerse se duplicaría para el productor.

Fig. 10. SENSIBILIDAD DE LOS AHORROS EN EL COSTO ÓPTIMO DEL PRODUCTOR ANTE CAMBIOS EN D Y DELTA



Fuente: los autores

D. Modelo de Negociación

En la sección V-C y en el apéndice se demostró que el productor siempre gana con el modelo VMI Cooperativo, por tal razón, se propone un modelo de negociación por medio del cual se define un incentivo β que este agente podría otorgar al comprador (el agente menos beneficiado) para adoptar el modelo VMI Cooperativo.

La ecuación (27) corresponde a la función objetivo del productor (3) a la cual se le suma el valor β . La restricción (28) hace referencia al descuento que tendría el comprador por adoptar el modelo VMI Cooperativo, que restado a la función objetivo de este agente (4), debe ser menor o igual al costo que obtendría por el modelo No Cooperativo.

$$Min \frac{C_M R}{kq} + \frac{1}{2} Hq \left(\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) + \beta \quad (27)$$

S.a.

$$\frac{hq}{2} + \frac{C_c R}{q} - \beta \leq \sqrt{2C_c R h} \quad (28)$$

$$\beta \geq 0, k > 0, q > 0$$

Al resolver este modelo, las variables de decisión tomaron los mismos valores del modelo VMI Cooperativo en su punto óptimo (cuando $\lambda=0,5$), al cumplir con las condiciones de optimación de Karush-Kuhn-Tucker. El valor de β se determina como la diferencia entre el costo del modelo VMI Cooperativo y del VMI No Cooperativo para el comprador, como se presenta a continuación en la ecuación (29):

$$\beta = \sqrt{\frac{C_c R \left(h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) \right)}{2}} + \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2C_c R}{h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)}} - \sqrt{2C_c R h} \quad (29)$$

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó una cadena de suministros de dos niveles, un productor y un comprador, quienes están involucrados en la producción y distribución de un sólo tipo de producto terminado. Se examinaron dos formas de interacciones en lo que respecta a la función objetivo (costos totales de inventario) de los agentes: VMI Cooperativo y VMI No Cooperativo. Además, se propuso un modelo de negociación con el fin de que el agente que más gane con la integración pueda otorgar un incentivo al otro agente. Las estrategias, definidas en el juego de la cadena de suministros estudiada se constituyen por la combinación de cantidades que el productor debe despachar al comprador (q) y la frecuencia de abastecimiento durante un ciclo del productor de dichas cantidades, llamada también constante de coordinación (k).

Para el modelo VMI Cooperativo, basado en la metodología de Esmaeili et al [11], se optimizó la suma ponderada de las funciones objetivo de los agentes para obtener las variables de decisión contenidas en la curva de Eficiencia de Pareto, los cuales se utilizaron en la función objetivo no ponderada para encontrar el mínimo; y para el modelo No Cooperativo, se optimizaron los costos de cada uno de los agentes de manera individual y secuencial y se determinó el equilibrio de Stackelberg, es decir, la mejor combinación de estrategias (valor de q y de k) que conviene a ambos en condiciones de no cooperación. Se encontró que el modelo VMI Cooperativo coincidió con el No Cooperativo cuando λ es cero.

Se demostró que el modelo VMI Cooperativo siempre favoreció al productor, mientras que el No Cooperativo siempre favoreció al comprador. Por lo tanto, se propuso un modelo de negociación para calcular el incentivo que puede otorgar el productor al comprador para adoptar el modelo VMI Cooperativo. Las variables de decisión en el modelo de negociación tomaron los mismos valores del modelo VMI Cooperativo en su punto óptimo, por consiguiente, el valor del incentivo resultó de la diferencia entre el costo del modelo VMI Cooperativo óptimo y del No Cooperativo para el comprador.

No hubo diferencia entre el modelo VMI Cooperativo óptimo y el No Cooperativo óptimo cuando la proporción entre la tasa de demanda y la tasa

de producción fue igual a 0.5. En la Tabla IV se detalla bajo qué condiciones de los parámetros se podrían obtener ahorros por adoptar el modelo VMI Cooperativo con respecto al No Cooperativo.

TABLA IV
CONDICIONES DE LOS PARÁMETROS EN LOS MODELOS PARA OBTENER AHORROS EN COSTOS

	VMI COOPERATIVO	VMI NO COOPERATIVO
COMPRADOR	Nunca es conveniente para este agente. Es menos desventajoso adoptar el modelo VMI Cooperativo óptimo cuando d es inferior a 0.5.	Para cualquier combinación de parámetros siempre es conveniente.
PRODUCTOR	Siempre es conveniente para este agente. Los mayores ahorros en costos se obtienen, por adoptar este modelo, cuando δ se acerca a 0 o a 1, d tiende a 1 y los costos de ordenar disminuyan.	Nunca es conveniente, excepto cuando δ es 0.5, donde resulta igual al modelo VMI Cooperativo óptimo.
CADENA	Los mayores ahorros en costos se obtienen, por adoptar este modelo, cuando δ se acerca a 0 o a 1, d tiende a 1 y g disminuya (CM disminuya o C_c aumente).	Nunca es conveniente, excepto cuando δ es 0.5, donde resulta igual al modelo VMI Cooperativo óptimo.

Esta investigación puede extenderse a cadenas de suministros de múltiples escalones (n productores y m compradores), con demandas probabilísticas y considerando tiempos de entrega para uno o varios productos y analizar otros factores que favorezcan o no la implementación de un acuerdo VMI, tanto para la cadena como para cada uno de los agentes.

APÉNDICE: DEMOSTRACIONES

A. Inventario promedio del productor

Inventario Promedio = Área bajo la curva / tiempo de ciclo total

$$I_p = \frac{\frac{Pt^2}{2} + \frac{t}{2} \left(\sum_{i=1}^{(L-1)} iPt \right) + \left(\sum_{i=2}^L iPt \right) - \left(\sum_{i=1}^{(L-1)} 2iq \right)}{kt} + \frac{\frac{\tau}{2} (LPt - q(k-1)) + tq(k-L-1) + \sum_{i=2}^{(k-L-1)} tq(k-L-i) + \frac{PTS^2}{2}}{kt}$$

Como,

$$\tau = (k-1) \left(\frac{Rt}{P} \right) - Lt; \quad q = Rt; \quad Ts = Rt / P;$$

Entonces,

$$I_p = \frac{1}{2} R \left(-1 + \frac{2R}{P} + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) t$$

Para dejar el inventario promedio en términos de Q , k y q , se utilizan las siguientes relaciones:

$$Rt = \frac{Q}{k}, q = \frac{Q}{k}$$

Dado lo anterior, I_p se replantea finalmente así:

$$I_p = \frac{Q \left(\frac{2R}{P} - 1 + k \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right)}{2k}$$

Además, τ_s es una fracción de tiempo que oscila entre 0 y t , por tanto:

$$0 \leq \tau_s = (k-1) \frac{R}{P} t - Lt \leq t$$

$$L^* = \left[(k^* - 1) \frac{R}{P} \right]$$

B. Demostración CTC_{Coad}^* es óptima cuando

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Sea

$$CT_{Coad} = \left[\frac{hq}{2} + \frac{C_c R}{q} \right] + \left[\frac{C_M R}{Q} + \frac{1}{2} H \left(q \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + Q \left(1 - \frac{R}{P} \right) \right) \right]$$

$$\frac{\partial CT_{Coad}}{\partial q} = 0$$

$$\frac{h}{2} - \frac{C_c R}{q^2} + \frac{1}{2} H \left(-1 + \frac{2R}{P} \right) = 0$$

En la anterior expresión se reemplaza q por $q_{Coad}^*(\lambda)$ (8) y se tiene:

$$\frac{h}{2} - \frac{C_c R}{2RC_c(1-\lambda)} + \frac{1}{2} H \left(-1 + \frac{2R}{P} \right) = 0$$

$$\frac{h(1-\lambda) + \lambda H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)}{2(1-\lambda) \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2} H \left(-1 + \frac{2R}{P} \right) \right)}$$

$$= h(1-\lambda) + \lambda H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)$$

$$(1-\lambda) = \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

C. Demostración $CTC_{Cap}^* \leq CTNoC_{Coad}^*$

$$\sqrt{2R} \left(\sqrt{C_M H \left(1 - \frac{R}{P} \right)} + \sqrt{C_c \left(h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) \right)} \right)$$

$$\leq \sqrt{2R} \left(\sqrt{C_M H \left(1 - \frac{R}{P} \right)} + \sqrt{C_c h} \right)$$

$$+ H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{C_c}{h}}$$

$$\sqrt{C_c \left(h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) \right)} \leq \sqrt{C_c h} + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{C_c}{h}}$$

$$\sqrt{\left(h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) \right)} \leq \sqrt{h} + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{h}}$$

Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando:

$$H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) \leq 2H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) + H^2 \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{h}$$

Se demuestra que cuando $\frac{R}{P} \neq \frac{1}{2}$, el costo cooperativo de la cadena es menor que el costo no cooperativo de ésta.

D. Demostración $CTC_{Comp}^* \geq CTNoC_{Comp}^*$

$$\sqrt{\frac{C_c R}{2}} \left[\frac{h}{\sqrt{H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + h}} + \sqrt{H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + h} \right]$$

$$\geq \sqrt{2C_c R h}$$

$$\frac{2h + H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)}{\sqrt{H \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + h}} \geq 2\sqrt{h}$$

$$h + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) \geq \sqrt{hH \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + h^2}$$

$$\left(h + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right) \right)^2 \geq hH \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + h^2$$

$$h \left(\frac{2R}{P} - 1 \right) + H \left(\frac{R}{P} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq h \left(\frac{2R}{P} - 1 \right)$$

Para cualquier valor de los parámetros, el costo total cooperativo para el comprador será siempre mayor que el costo total del modelo no cooperativo, excepto cuando $\frac{R}{P} = \frac{1}{2}$ donde los dos costos son iguales.

E. Demostración $CTCop_{Prod}^* \leq CTNoCop_{Prod}^*$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2C_M HR \left(1 - \frac{R}{P}\right) + \left(2\frac{R}{P} - 1\right)} \sqrt{\frac{HRC_c}{2\left(2\frac{R}{P} - 1 + \frac{h}{H}\right)}} \\ & \leq \sqrt{2C_M HR \left(1 - \frac{R}{P}\right) + H \sqrt{\frac{C_c R}{2h} \left(2\frac{R}{P} - 1\right)}} \\ & \left(2\frac{R}{P} - 1\right) \sqrt{\frac{H}{\left(2\frac{R}{P} - 1 + \frac{h}{H}\right)}} \leq \sqrt{\frac{H^2}{h} \left(2\frac{R}{P} - 1\right)} \\ & \left(2\frac{R}{P} - 1\right) \sqrt{\frac{H}{H\left(2\frac{R}{P} - 1\right) + h}} \leq \sqrt{\frac{H}{h} \left(2\frac{R}{P} - 1\right)} \end{aligned}$$

Para $\frac{R}{P} = \frac{1}{2}$, ambas expresiones son iguales. Si $\frac{R}{P} > \frac{1}{2}$, entonces el factor $\left(2\frac{R}{P} - 1\right) > 0$ y los denominadores $H\left(2\frac{R}{P} - 1\right) + h > h$, por consiguiente, $CTCop_{Prod}^* \leq CTNoCop_{Prod}^*$, para cualquier valor de C_M y de C_c . Si $\frac{R}{P} < \frac{1}{2}$, entonces el factor $\left(2\frac{R}{P} - 1\right) < 0$ y los denominadores $H\left(2\frac{R}{P} - 1\right) + h < h$, por consiguiente, $CTCop_{Prod}^* \leq CTNoCop_{Prod}^*$, para cualquier valor de C_M y de C_c .

REFERENCIAS

[1] Abad, P.L. and Jaggi, C.K. "A joint approach for setting unit price and the length of the credit period for a seller when end demand is price sensitive", *International Journal of Production Economics*, 83, 115-122, 2003.

[2] Angulo, A., Nachtmann, H., and Waller, M. A. "Supply chain information sharing in a vendor managed inventory partnership. Journal of Business Logistics", *Journal of Business Logistics*, 25 (1), 101-120, 2004.

[3] Arora, V., Chan, F., and Tiwari, M. "An integrated approach for logistic and vendor managed inventory in supply chain", *Expert Systems with Applications*, 37, 39-44, 2010.

[4] Bylka, S. "Non-cooperative strategies for production and shipments lot sizing in the vendor-buyer system", *International Journal of Production Economics*, 118, 243-252, 2009.

[5] Challener, C. "Taking the VMI step to collaborative commerce", *Chemical Market Reporter*, 258 (21), 11-12, 2000.

[6] Chen, J.-M., Lin, I.-C., and Cheng, H.-L. "Channel coordination under consignment and vendor-managed inventory in a distribution system", *Transportation Research*, doi:10.1016/j.tre.2010.05.007, 2010.

[7] Choi, K.-S., Dai, J. G., and Song, J.-S. "On measuring supplier performance under vendor-managed inventory programs in capacitated supply chains", *Manufacturing and Service Operations Management*, 6 (1), 53-72, 2004.

[8] Choi, T.-M., Li, D., Yan, H., and Chi, C.-H. "Channel coordination in supply chains with agents having mean-variance objectives. Omega", 36, 565 - 576, 2008.

[9] Darwish, M. A., and Odah, O. M. "Vendor-managed inventory model for single-vendor multi-retailer supply chains", *European Journal of Operational Research*, 204, 473-484, 2010.

[10] Dong, Y., and Xu, K. "A supply chain model of vendor managed inventory", *Transportation Research, Part E* 38, 75-95, 2002.

[11] Esmaeili, M., Aryanezhad, M.-B., and Zeepongsekul, P. "A game theory approach in seller-buyer supply chain", *European Journal of Operational Research*, 195, 442-448, 2009.

[12] Gümü, M., Jewkes, E. M., and Bookbin, J. H. "Impact of consignment inventory and vendor-managed inventory for a two-party supply chain", *International Journal of Production Economics*, 113, 502-517, 2008.

[13] Hemmelmayr, V., Doerner, K. F., Hartl, R. F., and Savelsbergh, M. W. "Vendor managed inventory for environments with stochastic product usage", *European Journal of Operational Research*, 202, 686-695, 2010.

[14] Hennes, J.-C., and Arda, Y. "Supply chain coordination: A game-theory approach. Engineering Applications of Artificial Intelligence", 21, 399-405, 2008.

[15] Holweg, M., Disney, S., Holmström, J., and Smaros, J. "Supply Chain Collaboration: Making Sense of the Strategy Continuum", *European Management Journal*, 23 (2), 170-181, 2005.

[16] Kuk, G. "Effectiveness of vendor-managed inventory in the electronics industry: determinants and outcomes", *Information and Management*, 41, 645-654, 2004.

[17] Kwak, C., Choi, J. S., Kim, C. O., and Kwon, I.-H. "Situation reactive approach to Vendor Managed Inventory problem", *Expert Systems with Applications*, 36, 9039-9045, 2009.

[18] Lee, C. C., and Chu, W. H. "Who should control inven-

- tory in a supply chain?", *European Journal of Operational Research*, 164, 158–172, 2005.
- [19] Lee, H., So, K., and Tang, C. "The value of information sharing in a two-level supply chain", *Management Science*, 46 (5), 626-643, 2000.
- [20] Leng, M., and Parlar, M. "Lead-time reduction in a two-level supply chain: Non-cooperative equilibria vs. Coordination with a profit-sharing contract", *International Journal of Production Economics*, 118, 521–544, 2009.
- [21] Ofuoku, M. "Stochastic vendor managed inventory: impact on non-identical retailers", *PhD. Thesis. New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico*, 2009.
- [22] Perez Navarro, J., Jimeno Pastor, J. L., and Cerdá Tena, E. *Teoría de Juegos*. Madrid: Pearson Educación S.A., 2004.
- [23] Ru, J., and Wang, Y. "Consignment contracting: Who should control inventory in the supply chain?", *European Journal of Operational Research*, 201, 760–769, 2010.
- [24] Sari, K. "On the benefits of CPFR and VMI: a comparative simulation study", *International Journal of Production Economics*, 113 (2), 575-586, 2008.
- [25] Sarmah, S. P., Acharya, D., and Goyal, S. K. "Buyer vendor coordination models in supply chain management", *European Journal of Operational Research*, 175, 1–15, 2006.
- [26] Savasanelil, S., and Erikp, N. (2010). An analysis of manufacturer benefits under vendor-managed systems. *IIE Transactions*, 42, 455–477.
- [27] Song, D.-P., and Dinwoodie, J. "Quantifying the effectiveness of VMI and integrated inventory management in a supply chain with uncertain lead-times and uncertain demands", *Production Planning and Control*, 19 (6), 590-600, 2008.
- [28] Southard, P. B., and Swenseth, S. R. "Evaluating vendor-managed inventory (VMI) in non-traditional environments using simulation", *International Journal of Production Economics*, 116, 275-287, 2008.
- [29] Szmerekovsky, J. G., and Zhang, J. "Coordination and adoption of item-level RFID with vendor managed inventory", *International Journal of Production Economics*, 114, 388– 398, 2008.
- [30] Torres, F., y Ballesteros, F. "Modelo de un sistema coordinado productor-comprador a través de una estrategia basada en VMI", presented at the 5th Americas International Conference on Production Research. Bogotá: Universidad de los Andes, 2010.
- [31] Towill, D., and Disney, S. "The effect of vendor-managed inventory (VMI) dynamics on the bullwhip effect in supply chains", *International Journal of Production Economics*, 85 (2), 199-215, 2003.
- [32] Tyan, J., and Wee, H.-M. "Vendor managed inventory: a survey of the Taiwanese grocery industry", *Journal of Purchasing and Supply Management*, 9, 11–18, 2003.
- [33] Vlist, P. v., Kuik, R., and Verheijen, B. "Note on supply chain integration in vendor-managed inventory", *Decision Support Systems*, 44, 360–365, 2007.
- [34] White, A., and Censlive, M. "Observations on modeling strategies for vendor-managed inventory", *Journal of Manufacturing Technology Management*, 17 (4), 496-512, 2006.
- [35] Wong, W., Qi, J., and Leung, S. "Coordinating supply chains with sales rebate contracts and vendor-managed inventory", *International Journal of Production Economics*, 120, 151–161, 2009.
- [36] Yang, K.-K., Ruben, R. A., and Webster, S. "Managing vendor inventory in a dual level distribution system", *Journal of Business Logistics*, 24 (2), 91-108, 2003.
- [37] Yang, L., Ng, C., and Cheng, T. "Evaluating the effects of distribution centers on the performance of vendor-managed inventory systems", *European Journal of Operational Research*, 201, 112-122, 2010.
- [38] Yao, Y., Dong, Y., and Dresner, M. "Managing supply chain backorders under vendor managed inventory: An incentive approach and empirical analysis", *European Journal of Operational Research*, 203, 350-359, 2010.
- [39] Yao, Y., Evers, P. T., and Dresner, M. E. "Supply chain integration in vendor-managed inventory", *Decision Support Systems*, 43, 663– 674, 2007.
- [40] Yu, H., Zeng, A. Z., and Zhao, L. "Analyzing the evolutionary stability of the vendor-managed inventory supply chains", *Computers and Industrial Engineering*, 56, 274–282, 2009.
- [41] Yu, Y., Chu, F., and Chen, H. "A Stackelberg game and its improvement in a VMI system with a manufacturing vendor", *European Journal of Operational Research*, 192, 929–948, 2009.
- [42] Yu, Y., Huang, G. Q., and Liang, L. "Stackelberg game-theoretic model for optimizing advertising, pricing and inventory policies in vendor managed inventory (VMI) production supply chains", *Computers and Industrial Engineering*, 57, 368–382, 2009.
- [43] Zavanella, L., and Zanoni, S. "A one-vendor multi-buyer integrated production-inventory model: The 'ConsignmentStock' case", *International Journal of Production Economics*, 118, 225–232, 2009.
- [44] Zhang, T., Liang, L., Yu, Y., and Yu, Y. "An integrated vendor-managed inventory model for a two-echelon system with order cost reduction", *International Journal of Production Economics*, 109, 241–253, 2007.