

# Modelo matemático no lineal en un sistema de temperatura para un recinto cerrado

**Paula Andrea Ortiz Valencia**

MSc en Ingeniería área Automática,  
Universidad Pontificia Bolivariana  
Docente Tiempo Completo, Líder e Investigadora  
Grupo GINVESTAP, Instituto Tecnológico Metropolitano ITM  
Medellín, Colombia  
paulaortiz@itm.edu.co

**Alexánder Arias Londoño**

MSc en Ingeniería de Sistemas,  
Universidad Nacional - Facultad de Minas  
Docente Tiempo Completo, Investigador Grupo GIT,  
Instituto Tecnológico Metropolitano ITM  
Medellín, Colombia  
alexanderarias@itm.edu.co

**Diego Alejandro Guerreño Peña**

MSc en Ingeniería Informática, Universidad Eafit  
Docente Tiempo Completo, Investigador Grupo GIT,  
Instituto Tecnológico Metropolitano ITM  
Medellín, Colombia  
diegoguerrero@itm.edu.co

**Resumen—** En este artículo se plantea el modelo matemático para un módulo didáctico de control donde se analiza la variable temperatura. La obtención de modelo es necesaria para simular la dinámica del proceso y desarrollar estrategias de control que luego puedan ser aplicadas en el sistema real. Con este objetivo, es importante que el modelo, como no es único, sea una representación fidedigna del proceso objeto de análisis. Para obtener el modelo matemático se trabaja el sistema como una caja gris, donde se conocen las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento del proceso, en términos de parámetros dinámicos del sistema; es por ello que la obtención del modelo matemático se divide en dos partes, la primera, encontrar las ecuaciones físicas del sistema en términos de algunos parámetros desconocidos; la segunda, encontrar estos parámetros con mínimos cuadrados. Una vez obtenido el modelo matemático se procede a comprobar que el modelo si sea confiable, para ello se realizó una validación del modelo obtenido sobre la planta y se encontró que el modelo si era satisfactorio.

Esta técnica de identificación de sistemas puede ser aplicada a otros procesos tanto lineales como no lineales, en los cuales se conozcan las ecuaciones físicas del sistema en términos de parámetros desconocidos.

**Palabras clave—** Identificación de sistemas, Mínimos Cuadrados, Modelo Matemático, Sistema dinámico

**Abstract—** In this article the mathematical model is explained for a didactic control module where the temperature variable is analyzed. The model being used is necessary to simulate the dynamics of the process and develop some control strategies that can be applied in a real system. With this purpose in mind, it is important that the model, which is not the only one, is a trustworthy representation of the purpose of analysis.

To obtain the mathematical model, the gray box system is carried out. Here, the mathematical equations that rule

the behavior of the process are known in terms of dynamic parameters of the system applied; this is why that the obtaining of the mathematical model is divided into two parts. The first one has to do with the physical equations of the system in terms of some unknown parameters. The second one deals with the way these parameters are found by using minimum squares. Once the mathematical model was done, its worthiness was confirmed. For such a purpose, the validity of the model was proved and it was found to be adequate. This system identification technique can be applied in other process with known physical equations in terms of unknown parameters

**Keywords—** Systems Identification, Minimal Square, Mathematical Model, Dynamic Process

## I. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el desarrollo matemático de un sistema no lineal de temperatura, el desarrollo del modelo consta de dos partes; en la primera parte se obtienen las ecuaciones dinámicas que rigen el comportamiento del sistema a partir de ecuaciones físicas, aplicando leyes termodinámicas, así se tiene la estructura del modelo matemático, en términos de algunos parámetros que varían según las características del sistema que se desea modelar, entonces, la segunda parte es obtener el valor de estos parámetros mediante identificación paramétrica por el método de mínimos cuadrados.

Además, el proceso de modelado es frecuentemente iterativo; un modelo matemático basado en las leyes físicas sugerirá cuáles datos experimentales deben tomarse y, a su vez, el modelo puede llevar grandes refinamientos con el fin de acoplarse a los datos reales.

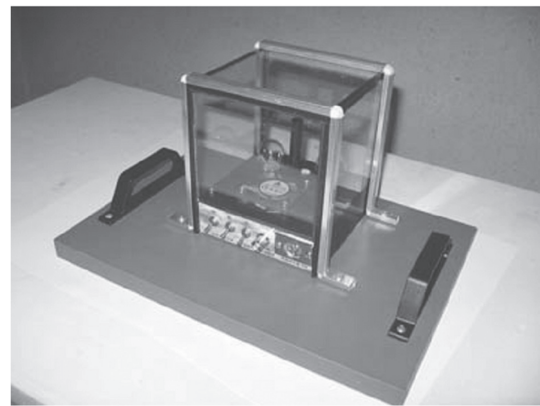
A continuación se presenta una revisión de algunos artículos que explican el modelo matemático aplicado a diferentes procesos térmicos, con ecuaciones físicas y por métodos experimentales: El modelamiento de recintos cerrados ha constituido un elemento de importancia para llevar a cabo procesos en la industria y los experimentos de investigaciones, esto debido a la estabilidad que se debe tener al manejar muchos procesos. Por ejemplo, en el proyecto de submillikelvin se desarrolló un recinto de aislamiento térmico en forma de caja de dimensiones internas de 1m x 1m x 0,8m para llevar a cabo mediciones de precisión a temperatura ambiente. El diseño del recinto se basa en la solución de la ecuación de la conducción del calor por un método de aproximación en diferencias finitas, las mediciones se realizaron en periodos consecutivos de once días durante cuatro meses, encontrándose una estabilidad de  $\pm 0.5\text{mK/h}$ . En el proyecto se analizaron las componentes de las mediciones mediante el espectro de energía, a través de una transformación rápida de Fourier (FFT) [1]

En el trabajo modelización matemática de la transferencia de calor compleja de un recinto rectangular, se construye un modelo matemático de un intercambio inestable de calor por convección-radiación en una región cerrada en presencia de una zona de falta de homogeneidad de temperatura y el intercambio de calor no lineal con el medio externo. La aproximación Rosseland se utilizó en el análisis de la radiación en una cavidad gaseosa, que es un modelo intermedio entre la aproximación de la radiación en la superficie y el uso de las ecuaciones de transferencia de la radiación [12].

La Fig. 1 presenta la configuración del sistema de la caja térmica fabricada en el laboratorio de Control Digital de la Facultad de Ingeniería en Electromecánica, Medio Ambiente e Informática Industrial de la University of Craiova, Romania. El modelo de todo el sistema se muestra en la Fig. 2, en él se detallan los elementos esenciales por medio de numerales. El recinto se calienta con una o dos bombillas de 12 V DC / 21 W como se muestra en el numeral 1 de la Fig 2. El sensor de temperatura del numeral 2 cierra el lazo de control. Los equipos de control del numeral 4 deberán tener un área extendida mostrada en el numeral 5 y varios controles del operador en el numeral 6. El

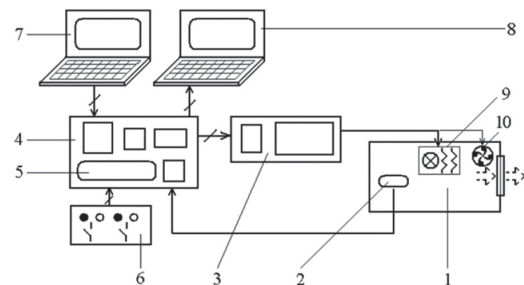
piloto del numeral 3 debe ser capaz de transferir tanto señales analógicas como señales de control digitales con PWM. El equipo numeral 7 es para el desarrollo y transferencia del programa y los datos en línea. Un equipo extra alberga un analizador lógico para la depuración y las evaluaciones. Para la identificación de la función de transferencia de la caja no se puede utilizar un enfoque analítico porque el recinto tiene diferentes materiales con características cuantitativas desconocidas. Por ello, en ese proyecto se utiliza un método de identificación simple basado en puntos experimentales IN-OUT [6].

FIG. 1. MODELO DEL PROYECTO "DIGITAL EQUIPMENT FOR THE TEMPERATURE CONTROL INSIDE AN ENCLOSURE"



Fuente: Tomado de [6]

FIG. 2. MODELO POR PARTES DEL PROYECTO "DIGITAL EQUIPMENT FOR THE TEMPERATURE CONTROL INSIDE AN ENCLOSURE"



Fuente: Tomado de [6]

D. Bravo Montenegro y M. López Ortega en su artículo "Modelo Matemático de un Tubo Intercambiador de Calor", Basándose en las teorías de Nusselt encuentra el modelo matemático de un tubo intercambiador de calor para obtener el valor promedio del coeficiente de transferencia de calor y el volumen de condensado; estos parámetros se determinan en función de las temperaturas del vapor y del tubo. [5]

Diego Álvarez de los Corrales Melgar desarrolló un modelo matemático aplicado a caldera de recuperación de calor, en este se expone un procedimiento de cálculo que permite modelizar la caldera de recuperación de calor y conocer el comportamiento de la misma para todos los casos posibles de carga de la Turbina de Gases. El propósito del artículo es el de plasmar las ecuaciones que intervienen en el proceso de transferencia térmica de la Caldera de Recuperación de Calor que constituyen el modelo matemático de la misma. [8]

En el trabajo de Farid B. Cortés, Farid Chejne Janna, Jhon W Zartha y César Isaza se desarrolló modelo un matemático no estacionario para describir el proceso adsorción y desorción de metanol en carbón activado funcional para el entendimiento de un refrigerador alternativo. Este modelo de carácter fenomenológico conformado por los balances de materia, energía y cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas se discretizó en el espacio por medio de volúmenes finitos, mediante la aproximación de un esquema de diferencia central de primer orden para los términos difusivos y convectivos. [11]

En el artículo presentado por Antonio Bula y Antonio Márquez Gentil se analiza el modelo matemático de un sistema de acondicionamiento de aire de un recinto de un piso, teniendo en cuenta las condiciones inherentes del sistema (capacidad de la unidad, carga térmica, SCFM, volumen del recinto, porcentaje de aire de reposición), las condiciones de aire exterior (temperaturas y humedades relativas) y las condiciones de control y restricciones del sistema de acondicionamiento de aire por compresión de vapor en estado transitorio. El modelo se validó mediante la comparación de los porcentajes de errores de los resultados obtenidos con datos reales de monitoreo tomados en un cuarto de control de una planta telefónica. [2]

Según [20], la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) como herramienta de modelado numérico permite obtener una visión más aproximada y realista de los fenómenos de flujo de fluidos y los mecanismos de transferencia de calor y masa en lechos empacados, a través de la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes acopladas con los balances de materia y energía.

En el trabajo de Ríos Luis Carlos & Toro Nicolás, se explica la estimación de parámetros en modelos ARMA (Autoregressive, MovingAverage). Estos

modelos se basan en la representación de planta, que consiste en un formato en el cual la salida  $y(t)$  actual se expresa como una función lineal de salidas pasadas  $y(t-j)$  y de las entradas pasadas  $u(t-j-d)$ , donde  $d$  es el retardo. Los sistemas son tratados como cajas negras donde se tiene una señal de entrada, una de salida y las perturbaciones que afectan al sistema, este modelo da una representación lineal del sistema identificado en un punto de operación, donde se estima el modelo sólo con datos experimentales, no se conoce las ecuaciones matemáticas que rigen al proceso [20].

Barajas Sánchez & Luis Enrique presentaron un estudio sobre la identificación de parámetros de un modelo matemático mediante un algoritmo basado en cuasi-linearización y mínimos cuadrados, se demostró que el método de identificación de parámetros, basados en la cuasi-linearización y mínimos cuadrados es útil para determinar los parámetros desconocidos de un sistema dinámico lineal o no-lineal. Para la obtención de los parámetros del modelo, se requerirá del modelo matemático del sistema, las trayectorias de las señales de entrada y el comportamiento del sistema durante un estado transitorio en el que todos sus modos o elementos sean excitados. Para determinar los parámetros desconocidos se presentará un índice de comportamiento, el mismo que será minimizado, de tal manera que las trayectorias del modelo simulen exactamente las trayectorias del sistema real. Obteniéndose del proceso los valores de los parámetros desconocidos, este modelo es aceptable para una zona de trabajo que es donde se toman los datos[1].

Néstor Durango, Antonio Bula y Luis Donaldó, desarrollaron un modelo matemático para secador de alimentos de flujo radial, la metodología siguió el diseño de un experimento factorial, el cual, mediante análisis estadístico, posibilitó la obtención del modelo matemático que describe el comportamiento del proceso para un tiempo de secado de tres horas. Las variables estudiadas fueron: relación superficie/volumen, masa de yuca, temperatura del aire de recirculación y velocidad de flujo de aire. El análisis estableció que las variables de mayor influencia en el proceso son la relación superficie/volumen, seguida por la masa de material que se iba a secar[14].

La obtención de un modelo matemático es necesaria en cualquier proceso que se lleve a cabo

para analizar el comportamiento del sistema. Aunque el modelo matemático no es único, se debe garantizar que sea confiable [24]. De acuerdo a esto, en este trabajo se desarrolla el modelo matemático a partir de leyes físicas, las cuales se encuentran en términos de parámetros dinámicos que varían los cuales se identifican por el método de mínimo cuadrados.

## II. DESARROLLO

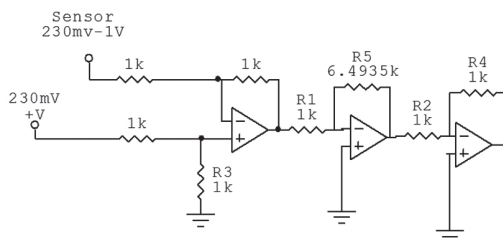
### A. Descripción de la planta

El módulo didáctico de control de temperatura consiste en un sistema cerrado similar al de una incubadora, con un área de  $0.75 \text{ m}^2$  y un volumen de  $0.1875 \text{ m}^3$ , el material del módulo es madera, de color negro. El sistema está compuesto de tres sensores de temperatura, un actuador, una tarjeta de adquisición de datos NI USB-6259.

#### 1. Sistema de medición

El módulo didáctico de control cuenta con 3 sensores de temperatura, cada uno de ellos se usa para medir un punto específico, estos 3 puntos son: la temperatura al interior, exterior y en las paredes del módulo, la temperatura en las paredes del módulo y la temperatura al exterior del módulo. El rango de medición de temperatura se encuentra entre  $23^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$ , para sensar la temperatura se utilizó un sensor LM35, el cual presenta una salida lineal y proporcional a la temperatura de  $10\text{mV}/^\circ\text{C}$ , [16]. Para el rango de temperatura a trabajar se tiene una señal de voltaje que varía entre  $230\text{mV}$  y  $1\text{V}$ , esta señal es necesario acondicionarla para obtener un rango de salida entre  $0$  y  $5\text{V}$ , el acondicionamiento de señal se muestra en la Fig. 3.

FIG. 3. ACONDICIONAMIENTO DE SEÑAL PARA EL LM35



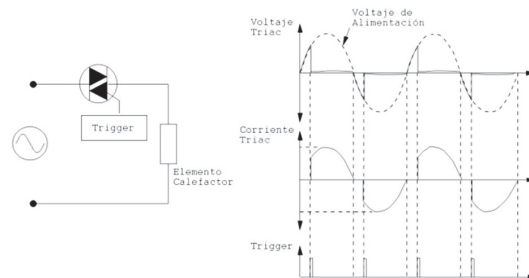
Fuente: Autor del proyecto

#### 2. Sistema de potencia

El elemento final de control trabaja con una alimentación de  $120\text{VAC}$  y una potencia de  $100\text{W}$ .

Para este control de potencia se utiliza la activación del trigger de un triac. El disparo del triac permite que pase corriente a la carga, este paso de corriente es controlado por fase como se muestra en la Fig. 4 [21]. El control del trigger se realiza por medio de un cambio en el voltaje de  $0$  a  $5\text{V}$ , es decir, cuando se tiene  $0\text{V}$  el ángulo de disparo es de  $0^\circ$  y cuando se tiene  $5\text{V}$  el ángulo de disparo es de  $180^\circ$  [23]

FIG. 4. TRIAC DE POTENCIA



#### 3. Sistema de adquisición de datos

Una vez acondicionados los 3 sensores se procede a desarrollar un método para adquirir los datos el cual es implementado en LabVIEW. El método de adquisición se muestra en la Fig. 5, la adquisición se realizó por medio de la tarjeta NI USB-6259 [17]. En el método de adquisición se utiliza la configuración de un canal como entrada análoga, se define el reloj para el muestreo, se muestrea continuamente hasta que el usuario detiene el modo de adquisición, al final se guarda todo en un archivo y se limpian todas las tareas y procesos abiertos en el sistema operativo [15].

### B. Técnica de identificación

La identificación de sistemas tiene por objeto obtener el modelo de un sistema dinámico a partir de datos experimentales, en los cuales se tienen en cuenta las variables de entrada, variables de salida y las posibles perturbaciones que afectan al sistema [10].

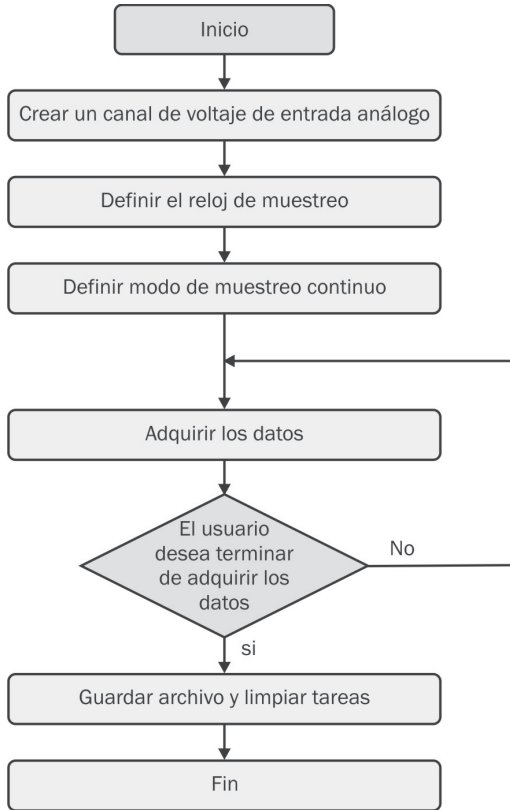
Para realizar una identificación es necesario realizar los siguientes pasos:

Recolección de datos. Primero se define qué variables se van a medir y cuáles van a ser las señales de entrada que afectan al sistema.

Selección del modelo: se realiza a partir de un grupo de modelos, se elige el más adecuado y representativo del sistema.

Validación del modelo: La evaluación de la calidad del modelo se basa en determinar cómo se desempeña el modelo cuando se trata de reproducir con él los datos obtenidos experimentalmente, según el comportamiento del sistema se acepta o se rechaza el modelo seleccionado para la identificación.

FIG. 5. MÉTODO PARA LA ADQUISICIÓN DE DATOS



**C. Método de mínimos cuadrados**

Este método es la base de distintos métodos paramétricos recursivos y no recursivos de identificación en el cual se trata de identificar los coeficientes  $\theta_{ij}$  del sistema de ecuaciones propuesto en el modelo [10], estas ecuaciones se representan como un sistema lineal

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_1 &= \hat{\theta}_{11}x_1 + \hat{\theta}_{12}x_2 + \dots + \hat{\theta}_{1r}x_n \\
 \hat{y}_2 &= \hat{\theta}_{21}x_1 + \hat{\theta}_{22}x_2 + \dots + \hat{\theta}_{2r}x_n \\
 &\vdots \\
 \hat{y}_r &= \hat{\theta}_{r1}x_1 + \hat{\theta}_{r2}x_2 + \dots + \hat{\theta}_{rm}x_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde  $r$  es el número de salidas del sistema y  $n$  es el número de entradas al sistema.

La ecuación (1) se puede representar como:

$$y = X\theta \tag{2}$$

$$z = X\theta + v \tag{3}$$

Donde  $z = [z(1)z(2)\dots z(n)]^T$  es el vector de la salida estimada del sistema,  $\theta = [\theta_0 \quad \theta_2 \dots \theta_n]^T$  es el vector de parámetros para estimar,  $X = [1 \quad \xi_1 \dots \xi_n]$  es la matriz de estados de la cual depende la señal de salida y  $v = [v(1) \quad v(2) \dots v(n)]^T$  es el vector de la medición del error.

El objetivo de este método de identificación es minimizar la suma del error cuadrático cometido en  $k$  medidas, para ello se define el error como la diferencia entre el valor medido y el estimado, y se busca minimizar el índice de comportamiento  $J$ :

$$J = \frac{1}{2} (z - x\theta)^T (z - x\theta) \tag{4}$$

El valor de  $\hat{\theta}$  que minimiza a  $J(\theta)$  debe satisfacer que  $\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$ . Al derivar "4" se tiene:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -X^T z + X^T X \hat{\theta} = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 X^T z &= X^T X \hat{\theta} \\
 X^T (z - X \hat{\theta}) &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Al despejar  $\hat{\theta}$  "6" se obtiene el valor estimado  $\hat{\theta}$ :

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T z \tag{7}$$

Con

$$E(v) = 0 \quad E(vv^T) = \sigma^2 I \tag{8}$$

**D. Metodología propuesta**

Para el desarrollo del modelo matemático aplicado al sistema de térmico se siguieron los siguientes pasos: primero se modela el sistema a partir de leyes físicas, una vez se tiene el modelo se determinan los parámetros desconocidos y la

dependencia de éstos con las variables del proceso; luego se toman los datos, para ello se debe garantizar la calibración de los instrumentos; una vez se toman los datos se realiza la identificación de los parámetros desconocidos por el método de mínimos cuadrados. Los datos que arroja el método de mínimos cuadrados deben de ser validados, para ello se toman nuevamente datos con una señal de excitación diferente a los datos tomados anteriormente, se compara estos datos con el modelo y se calcula el índice de desempeño, el cual dirá si el modelo es confiable o hay que volver a estimar los parámetros.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

#### A. Modelo Matemático del sistema

En la TABLA I Se detallan las variables usadas en el modelo matemático[18].

TABLA I. VARIABLES DEL SISTEMA

Variable	Definición de las variables
$H_e$	Flujo de calor suministrado por el elemento de potencia
$H_s$	Flujo de calor al interior del módulo de temperatura
$H_M$	Flujo de calor en las paredes del módulo de temperatura
$\dot{Q}$	Velocidad del flujo de calor en el sistema a controlar
$R_t$	Resistencia térmica del material
$R_{tb}$	Resistencia térmica del bombillo
$k_t$	Conductividad térmica = $1/Rt$
$C$	Capacidad calorífica
$M$	Masa del cuerpo
$c$	Calor específico
$T_a$	Temperatura en el exterior del sistema (Temperatura ambiente)
$T_s$	Temperatura al interior del módulo de temperatura
$T_b$	Temperatura del elemento final de control (resistencia térmica)

Para obtener el modelo se tiene la ecuación de equilibrio térmico descrita "(9)".

$$H_e = H_s + H_M \quad (9)$$

Donde  $H_M$  es el Flujo de calor en la pared del material del módulo de temperatura, el cual se da por convección, esta ley afirma que si existe una diferencia de temperatura en el interior de un lí-

quido o un gas, es casi seguro que se producirá un movimiento del fluido. Este movimiento transfiere calor de una parte del fluido a otra por un proceso llamado convección. El calentamiento de un sistema cerrado mediante un elemento generador de calor no depende tanto de la radiación como de las corrientes naturales de convección, que hacen que el aire caliente suba hacia el techo y el aire frío del resto del sistema se dirija hacia el elemento generador de calor.[19]

Donde  $H_s$  es el flujo de calor en el sistema al interior del módulo de temperatura, el cual se presenta por conducción, esta ley afirma que la velocidad de conducción de calor a través de un cuerpo por unidad de sección transversal es proporcional al gradiente de temperatura que existe en el cuerpo (con el signo cambiado). El factor de proporcionalidad se denomina conductividad térmica del material. Los materiales como el oro, la plata o el cobre tienen conductividades térmicas elevadas y conducen bien el calor, mientras que materiales como el vidrio o el amianto tienen conductividades cientos e incluso miles de veces menores; conducen muy mal el calor, y se conocen como aislantes. [22]

$$H_s = \frac{Q}{A} \quad (11)$$

$$\dot{Q} = C \frac{d}{dt} T_s \quad (12)$$

La capacidad calorífica varía según la sustancia, en el caso de estudio la sustancia objeto de análisis es aire seco, el cual es el que circula al interior del módulo de temperatura. Su relación con el calor específico es:  $C=M*c$ , donde la masa del cuerpo es una relación entre el volumen y la densidad, la densidad depende de la temperatura y de la presión, en la Fig. 6 se muestra la relación existente entre estas variables [9].

El calor específico es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa de una sustancia en un grado, esta depende de la temperatura, en la Fig. 7 se muestra la relación existente entre estas dos variables.

Al reemplazar "(10)", "(11)", "(12)" y "(13)" en "(9)" se encuentra el modelo del sistema

$$H_e = \frac{C}{A} \frac{d}{dt} T_s + \frac{(T_e - T_s)}{R_t} \quad (14)$$

Donde  $R_t$  es un parámetro que se encuentra por medio de identificación de sistemas paramétrica por el método de mínimos cuadrados.

FIG. 6. DENSIDAD AL INTERIOR DEL MÓDULO DE TEMPERATURA EN TÉRMINOS DE LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA

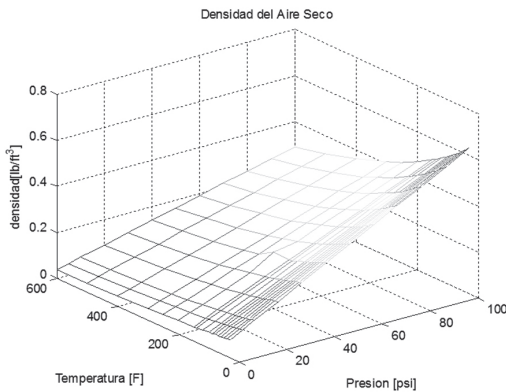
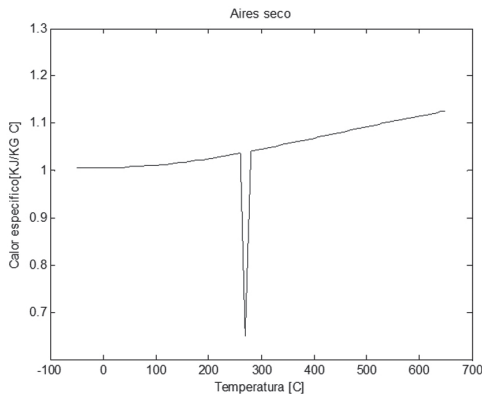


FIG. 7. CALOR ESPECÍFICO DEL AIRE SECO VS LA TEMPERATURA



### B. Cálculo del parámetro desconocido $R_t$ mediante mínimos cuadrados

En esta sección se explica la forma como se aplican las técnicas de identificación para estimar el valor de  $R_t$ .

#### 1. Pasos para la identificación

Para la aplicación de la técnica de identificación se debe tomar datos del sistema, tanto de la temperatura del medio ambiente, en el elemento calefactor y en el sistema que se quiere modelar en la Fig. 8, se muestra el voltaje aplicado al PWM y de la Fig. 9 a la Fig. 11, se muestra la respuesta

obtenida, tanto en voltaje como la entrega el sensor y en temperatura realizando la conversión.

FIG. 8. SEÑAL DE EXCITACIÓN

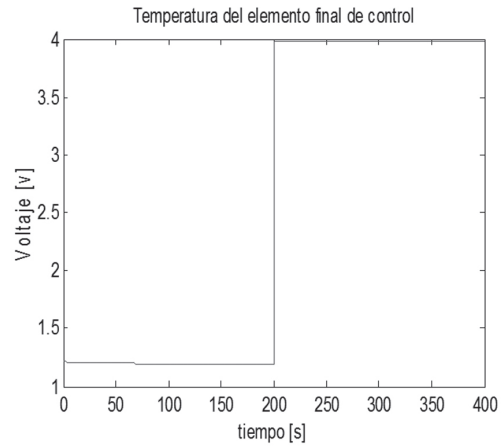


FIG. 9. RESPUESTA DEL SISTEMA

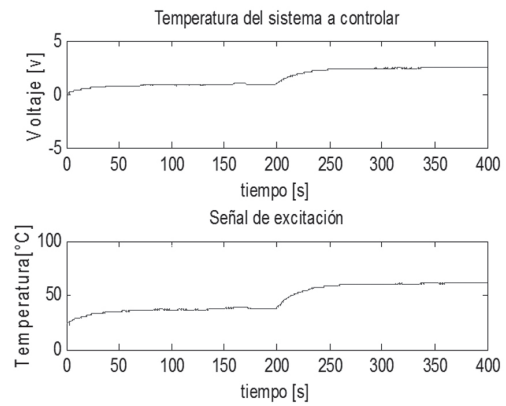
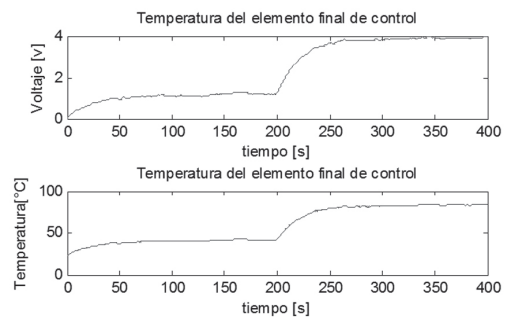
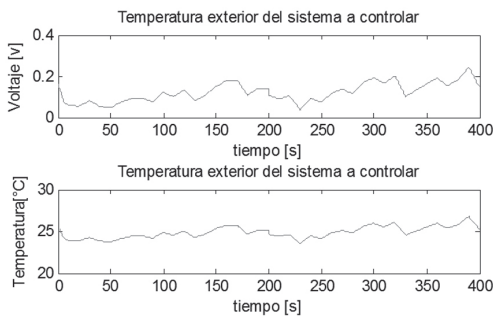


FIG. 10. RESPUESTA DEL SISTEMA CALEFACTOR



Del modelo se determinan las variables que afectan la resistencia térmica  $T_s$ ,  $T_a$ ,  $H_e$  se realiza un programa en Matlab que calcula el valor de  $R_t$ , al cual se le aplica el método de mínimos cuadrados, para ello se siguen los siguientes pasos

FIG. 11. TEMPERATURA EN EL EXTERIOR DEL SISTEMA



Primero se define la matriz de estados

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T_e(1) - T_s(1)}{H_e(1)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{T_e(n) - T_s(n)}{H_e(n)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Segundo se define el vector de parámetros a estimar:

$$\theta_1 = [Rt0 \quad Rt(T_e - T_s)/(H_e)] \quad (16)$$

Tercero se definen los vectores de las salidas estimadas, calculados a partir de los datos sensados.

$$z_2 = [Rt(1) \quad Rt(2) \quad \dots \quad Rt(N)]^T \quad (17)$$

Por último se calculan los parámetros a estimar con las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\theta}_1 = (X^T X)^{-1} X^T z_1 \quad (18)$$

### C. Verificación del resultado obtenido

Una vez efectuado el sistema se procede a realizar otro escalón a la entrada y tomar los datos reales para compararlos con los datos simulados, el resultado se muestra en la Fig. 12.

En la Fig. 13 se muestra el error obtenido entre la señal estimada y la señal encontrada con los datos reales, medidos en el sistema, con estos valores se calcula el índice de desempeño,  $J=$

0.0137. Con este resultado se puede decir que el modelo identificado es confiable.

FIG. 12. RESULTADO DE LA IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA

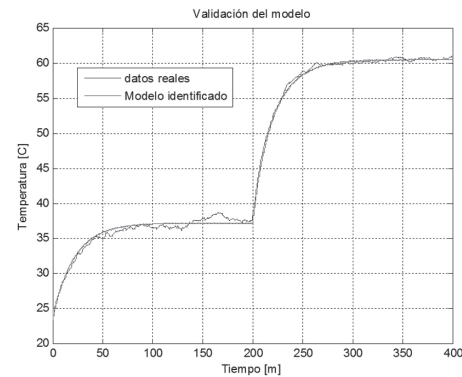
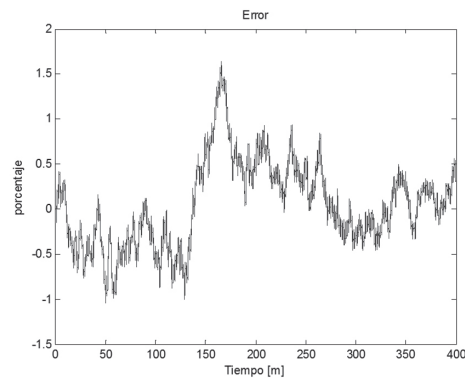


FIG. 13. ERROR ENTRE EL VALOR REAL Y ESTIMADO



### D. Comprobación del modelo

Para comprobar el sistema se realiza una segunda prueba, en la cual se aplica otra señal de excitación diferente a la que se identificó el modelo y se compara con el sistema construido en Simulink, el resultado se puede ver en la Fig. 14.

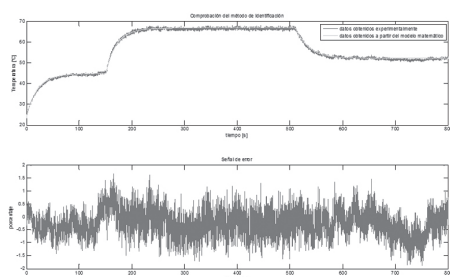
## IV. CONCLUSIONES

La selección del sistema de medición, es parte fundamental en cualquier sistema de control, ya que de este depende tanto la identificación del sistema, como la puesta en funcionamiento del sistema a controlar.

El modelo obtenido es un sistema no lineal, en el cual intervienen diferentes señales tanto externas como internas del sistema y fue obtenido con las leyes termodinámicas.



FIG. 14. COMPROBACIÓN DEL MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN



La identificación de sistemas se realizó en lazo abierto, para evitar compensaciones del sistema en lazo cerrado.

La identificación off-line permite obtener una idea básica del modelo, se recomienda una identificación on-line, que tome como base el modelo obtenido pero ajuste los parámetros de acuerdo al punto de operación del sistema.

Se verificó y comprobó que el modelo matemático encontrado cumple con los datos reales de la planta, por lo cual se puede decir que el sistema es confiable.

## REFERENCIAS

- [1] A. Bergamin, W.S. Ke, G. Zosi, "A thermal 0.8 m3 enclosure with submillikelvin stability", *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Vol.16 No.1. En: *Sci. Instrum.* Vol.16, No.96 doi: 10.1088/0022-3735/16/1/019, 1983.
- [2] A. Bula, A. Márquez, "Modelación matemática y simulación de un sistema de acondicionamiento de aire en estado transitorio", *Ingeniería y desarrollo*, No.11, 2002.
- [3] L.E. Barajas, "Identificación de parámetros de un modelo matemático mediante un algoritmo basado en cuasi-linearización y mínimos cuadrados". Disponible en: <http://biee.epn.edu.ec/dspace/handle/123456789/377>, 2004.
- [4] M. Campbell, S. Brunke, "Nonlinear Estimation of Aircraft Models for On-line Control Customization". *Aerospace Conference IEEE Proceedings*, Vol.2, pp: 2/621 - 2/628, 2001.
- [5] D. Bravo, M. López, "Modelo Matemático de un Tubo Intercambiador de Calor", *Revista de la Sociedad Colombiana de Física*, Vol. 41, No. 2, pp. 520-523, 2009.
- [6] D. Mihai, "Digital Equipment for the Temperature Control Inside an Enclosure. The System Modelling". ICATE 2010, Craiova, University of Craiova, Romania, 2010.
- [7] D. Mihai, C. Caramida, "Digital equipment for the temperature control inside an enclosure. The hardware and some experimental results", IC-MET, Craiova, Romania, 2010.
- [8] D. Álvarez de los Corrales Melgar, "Modelización de calderas de recuperación de calor (soplado)", *Ingeniería química*, No.417, pp.73-84, 2004.
- [9] Engineering ToolBox. "Tools and Basic Information for Design, Engineering and Construction of Technical Applications", 2005. [http://www.engineeringtoolbox.com/air-temperature-pressure-density-d\\_771.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-temperature-pressure-density-d_771.html) Consulta: Marzo, 2009.
- [10] J. Evans, S. Elkaim, B. Parkinson, "System Identification of an Autonomous Aircraft using GPS" Stanford University, 2001.
- [11] F. Cortés, F. Chejne, J. Zartha, C. Isaza. "Modelo Matemático de un refrigerador por adsorción de metanol en carbón activo", *Revista Biotecnología en el Sector Agropecuario y Agroindustrial*, Vol.8, No.2, 2010.
- [12] G.V. Kuznetsov, M.A., Sheremet, "Mathematical modelling of complex heat transfer in a rectangular enclosure", *Thermophysics and Aeromechanics*, Vol.16, No.1, pp.119-128, DOI: 10.1007/s11510-009-0012-z, 2009.
- [13] S. Lyashevskiy, Y. Chen, "Nonlinear Identification of Aircraft Indianapolis. Control Applications", *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference*, 1996.
- [14] N. Durango, A. Bula, L. Donaldo, "Modelo matemático para secador de alimentos de flujo radial". *Ingeniería y desarrollo*, No. 15, pp.1-8, 2004.
- [15] NI USB-622x/625x OEM. USER GUIDE. M Series USB-6221/6225/6229/6251/6255/6259 OEM Devices. <http://www.ni.com/pdf/products/us/371910a.pdf>, Consultado el 26 de Marzo de 2009.
- [16] NS, LM34/LM35 Precision Monolithic Temperature Sensors. National Semiconductor. Application Note 460. October 1986.

- [17] Manual NI USB-6259. <http://sine.ni.com/ds/app/doc/p/id/ds-20/lang/en> , Consultado el 26 de Marzo de 2009.
- [18] P. Ortiz, A. Arias, "Simulink aplicado a sistemas de control". Fondo editorial ITM, Medellín, 2010.
- [19] M. Pramparo, P. Rossi, "Balances de energía", Universidad Nacional de Rio Cuatro [http://www.ing.unrc.edu.ar/materias/balances\\_de\\_masa\\_y\\_energia/archivos/teoricos/08-balances\\_de\\_energia.pdf](http://www.ing.unrc.edu.ar/materias/balances_de_masa_y_energia/archivos/teoricos/08-balances_de_energia.pdf) Consulta octubre de 2010.
- [20] L.C. Ríos, N. Toro, "Estimación de parámetros en modelos arma por el criterio de mínimos cuadrados" Scientia et Technica, Año XII, No.31, UTP, 2006.
- [21] Power Control with Thyristors and Triacs. Power Semiconductor Applications Philips Semiconductors. 1994.
- [22] Tools and Basic Information for Design, Engineering and Construction of Technical Applications", 2005.Engieneering Toolbox, [http://www.engineeringtoolbox.com/air-temperature-pressure-density-d\\_771.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-temperature-pressure-density-d_771.html) Consulta: Marzo, 2010.
- [23] Triacs BT138 series.Philips Semiconductors Product specification.June 2001.
- [24] A. Zabaleta, M. Larrayoz, "Computational Fluid Dynamics Studies in Heat and Mass Transfer Phenomena in Packed Bed Extraction and Reaction Equipment", Universitdad Politécnica de Catalunya (España), 2007.