

# Control de Temperatura para un Sistema de Tanques Acoplados utilizando Autómatas Finitos

## Coupled tanks system temperature control using finite automata

**Nathalie Cañón Forero**

Ingeniero en Mecatrónica.  
Grupo de Investigación GAV. Bogotá, Colombia.  
Auxiliar de Investigación.  
Universidad Militar Nueva Granada.  
U1800871@unimilitar.edu.co

**Jenny Gutiérrez Calderón**

Ingeniero en Mecatrónica.  
Grupo de Investigación GAV. Bogotá, Colombia.  
Joven Investigador.  
Universidad Militar Nueva Granada.  
gav@unimilitar.edu.co

**Diego Rodríguez Mora**

Ingeniero en Mecatrónica.  
Grupo de Investigación GAV. Bogotá, Colombia.  
Auxiliar de Investigación.  
Universidad Militar Nueva Granada.  
U1800941@unimilitar.edu.co

**Darío Amaya Hurtado**

Ph.D. Ingeniería Mecánica. Universidad Estatal de Campinas.  
Docente de Tiempo Completo Líder de Grupo GAV.  
Universidad Militar Nueva Granada.  
Bogotá, Colombia  
gav@unimilitar.edu.co

**Óscar Avilés Sánchez**

Ph.D. Ingeniería Mecánica. Universidad Estatal de Campinas.  
Director de programa de Mecatrónica  
Universidad Militar Nueva Granada.  
Bogotá, Colombia  
oscar.aviles@unimilitar.edu.co

**Resumen—** En este trabajo se realizó, el modelado y diseño del sistema de control de la variable temperatura, en un tanque de almacenamiento de agua. Teniendo en cuenta la arquitectura híbrida del sistema (relación de la dinámica continua y la dinámica a través de eventos), para esto fue utilizado autómatas finitos como herramienta de modelado y control.

Inicialmente se obtuvo el modelo matemático, que corresponde a la dinámica continua, de la variable de temperatura del líquido que se encuentra en el tanque, agua. Por otro lado, para modelar el comportamiento de las variables que responden en función de eventos, se tomó en cuenta los posibles estados del sistema. Posteriormente, se establecieron los requerimientos y restricciones del sistema que surgieron a partir del análisis, los cuales complementan el comportamiento de la misma, se obtuvo la representación del proceso y su control, en un concepto de dinámica híbrida, mediante autómatas finitos. Este modelo se simuló con la herramienta StateFlow de Simulink de MATLAB® y se implementó en un sistema embebido Cyclone II. Previo a estos resultados, se realizó un controlador tipo PID para realizar la comparación de los comportamientos obtenidos en cada caso. Se verificó que es una técnica de fácil uso e implementación con gran eficiencia en tiempos de respuesta.

**Palabras clave—** Autómata Finito, Sistema Híbrido, sistema embebido.

**Abstract—** This work was performed, modeling and control system design variable temperature in a water storage tank. Given the hybrid architecture of the system (ratio of continuous dynamics and the dynamics through events),

was used finite automata as a tool for modeling and control.

Initially, the mathematical model was obtained, which corresponds to the continuous dynamic, variable temperature liquid in the tank, which in this case is water. This model is described by differential equations. On the other hand, for model the behavior of the variables that respond in terms of events was taken into account the possible states of the system. However, the development requirements and restrictions system that emerged from the analysis, which complement the analysis of the same, obtaining the representation of the process and control, a dynamic hybrid concept, using automata finite. This model was simulated with Stateflow tool of MATLAB® Simulink and implemented in a Cyclone II embedded system. Prior to these results, we performed a PID controller for the comparison of the behavior obtained in each case. Verifying that the technique is easy to use and implement with high efficiency in response times.

**Keywords—** Finite automaton, hybrid systems, embedded system.

## I. INTRODUCCIÓN

Un sistema híbrido es un sistema dinámico que tiene transferencia en estados discretos y variación en estados continuos. El comportamiento dinámico de la parte continua se describe por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, mien-

tras que el comportamiento dinámico de la parte discreta, se puede modelar por autómatas finitos o por redes Petri [1]. Cuando ocurre un evento discreto, el sistema describe el cambio dinámico del componente continuo [2].

El análisis del comportamiento dinámico del sistema híbrido se puede verificar bajo ciertas condiciones iniciales y señales de entrada y verifica si el sistema cumple con ciertas reglas. Los sistemas híbridos son usados, por ejemplo, en los modelos de procesos continuos que son controlados por controladores lógicos o sistemas embebidos [3].

Al usar modelos híbridos para representar el comportamiento de los sistemas que combinan procesos de tipo continuo o discreto, se hace una reducción de la complejidad del modelo en orden, por ejemplo, en lugar de tener que representar las relaciones dinámicas a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, se puede representar el mismo sistema por un conjunto de ecuaciones simples, usualmente la teoría de grafos es la más común para el modelado físico de fenómenos. [4]

Con el fin de tener un buen control sobre los distintos procesos en las industrias y otras áreas, ha sido necesario diseñar e implementar diferentes técnicas que permitan acceder a un manejo completo de las situaciones, entornos y maquinarias. Una de las prácticas que ha empezado a tener gran auge dentro de los métodos para realizar control en diferentes áreas, es el control por medio de autómatas finitos. Este es un método que permite disponer una máquina de estados que tiene la tarea de controlar determinados eventos [5].

Los autómatas finitos simples implícitamente se han utilizado en las máquinas electromecánicas hace más de un siglo. Una versión formal de ellas apareció en 1943 en McCulloch-Pitts modelos de redes neuronales. (Un análogo antes había aparecido en las cadenas de Markov.) Un trabajo intensivo sobre ellos en la década de 1950 (a veces bajo el nombre de las máquinas secuenciales) estableció muchas propiedades básicas, incluida la interpretación de los lenguajes regulares y equivalencia de las expresiones regulares [6].

Los autómatas se comenzaron a implementar en las áreas que requiriesen de procesos con

eventos o características discretas, en donde esta técnica resulta más útil y sencilla. Otro espacio en el que se usa esta metodología es en los sistemas de analizadores sintácticos, en donde el uso de expresiones regulares es masivo, esta es otra de las características principales de los autómatas [7].

Sin embargo, esta técnica también se aplica ampliamente en el análisis y modelado de sistemas híbridos, donde la reducción en la complejidad del orden de dicho modelo es muy notoria, de ahí la importancia de su utilización. [8]

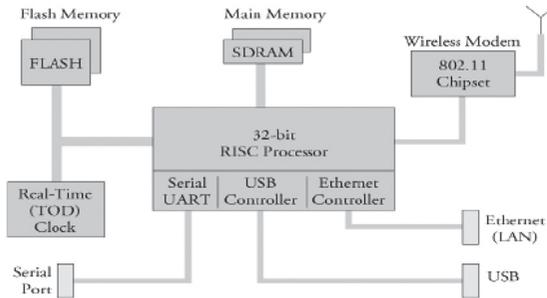
Un autómata finito es básicamente un reconocedor para un lenguaje, donde se tiene como entrada una cadena de caracteres pertenecientes a cierto sistema alfabético definido previamente y, luego de acuerdo a esa cadena de entrada el autómata procede a llevar una secuencia de eventos condicionados por los estados y sus respectivas entradas [9]. Un autómata finito es el modelo que es representado como una máquina secuencial, el cual es capaz de generar una palabra de salida dada una palabra de entrada. Para ello, se define un conjunto de estados que “memorizan” la parte de la palabra de entrada leída en cada momento y generan al mismo tiempo que transitan entre los estados, una salida. Se puede ver como un autómata que tiene dos cintas asociadas: una que lee las palabras de entrada, y otra de salida, en la que genera la respuesta del sistema. Pasa de un estado a otro, o al mismo estado, por medio de una condición y este ciclo se termina cuando llega al estado final [10].

Surge la necesidad de aplicar nuevas técnicas de control e implementación del mismo, que permita alcanzar un mayor desarrollo en distintas ramas de la ingeniería y las ciencias en general. El método de los autómatas finitos representa una simplificación en comparación con las técnicas usadas en el control clásico, y la implementación en el sistema embebido implica una reducción de costos con respecto a la utilización de un computador, y un aumento de confiabilidad en relación a sistemas como los Microcontroladores [11].

Un sistema embebido es un sistema cuya función principal no es computacional, pero es controlado por un computador integrado. Este computador puede ser un Microcontrolador o un Microprocesador. La palabra embebido implica que se encuentra dentro del sistema general,

oculto a la vista, y forma parte de un todo de mayores dimensiones [12]. La Fig. 1 muestra el esquema de un sistema embebido.

Fig. 1. EJEMPLO DE UN SISTEMA EMBEBIDO [10]



De acuerdo a lo anterior se plantea el objetivo de controlar la variable temperatura de un sistema de tanques acoplados mediante autómatas finitos, y con esto, implementar luego el control sobre un sistema embebido. Este trabajo explicará la metodología, el diseño global, la implementación con los resultados obtenidos de aplicación de la técnica de autómatas finitos.

## II. MÉTODO

### A. Comportamiento real de la planta

Por medio del método experimental, se dará a conocer de forma clara la descripción de la planta de tanques acoplados. Este sistema consta de un tanque de almacenamiento que contiene un fluido, y es donde se lleva a cabo un proceso de calentamiento y enfriamiento del agua.

Esta planta consta de un tanque, una resistencia, y un sensor, ver Fig. 2, los cuales llevan a cabo el proceso. Las variables a controlar son temperatura y flujo de calor. Los aspectos que se tienen en cuenta en el análisis son los parámetros del sistema: la resistencia y la capacitancia térmica.

El comportamiento que muestra la planta en su estado inicial, sin ningún tipo de control es el que se ve en la Fig. 3. Allí se observa que la temperatura del agua dentro del tanque sube aproximadamente hasta los 100 grados Celsius (siendo el eje vertical el valor en grados de la temperatura), donde el sistema se estabiliza.

Fig. 2. CAD DE TANQUE DE ALMACENAMIENTO DE AGUA

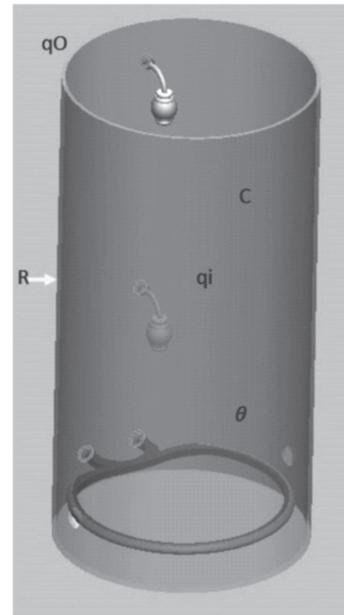
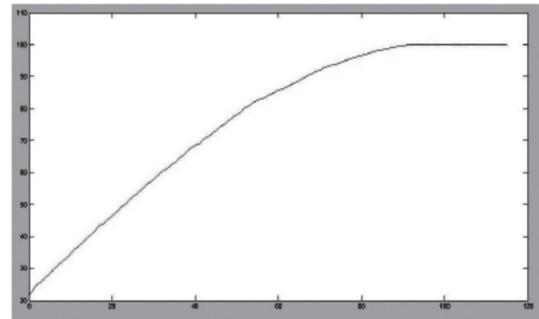


Fig. 3. COMPORTAMIENTO DE LA PLANTA SIN CONTROL



Acorde al comportamiento de la planta, se busca que la respuesta de la variable temperatura oscile entre 75 y 76 °C, y que se mantenga allí por el tiempo sea necesario. El fluido dentro del tanque tiene una altura aproximada de 0.20m.

### B. Modelo matemático del sistema

#### Parte Continua

Para el modelo del sistema térmico se tomó en cuenta la ecuación diferencial de transferencia de calor (1).

$$\dot{\theta} = \frac{q_i}{C} - \frac{\theta}{RC} \quad (1)$$

En donde  $q_i$  es la entrada de flujo de calor que induce la resistencia dentro del tanque,  $C$  es la capacitancia del tanque,  $R$  es la resistencia del

material que va a cubrir el fluido, y  $\theta$  es la temperatura.

$R$  está definida, como en (2).

$$R = \frac{1}{K} \quad (2)$$

El sistema analizado por convección térmica, por lo tanto  $K$ , se define en (3)

$$K = HA \quad (3)$$

El análisis se basa en la transferencia de calor de la resistencia hacia el agua, el fluido adiciona parámetros al sistema, y estos se relacionan en la Tabla I.

TABLA I.  
PARÁMETROS DEL FLUIDO

DATOS DE EL AGUA CONTENIDA EN EL TANQUE PARA UNA ALTURA DE 0.20 m	
Masa ( $m$ )	14.72kg
Coefficiente de Convención del fluido ( $H$ )	32.76 kcal / m <sup>2</sup> s °C
Área normal del flujo de calor ( $A$ )	0.36308m <sup>2</sup>

Según lo anterior, el valor para la resistencia  $R$  es (4):

$$R = 0,084 \text{ } ^\circ\text{C s} / \text{K cal} \quad (4)$$

De acuerdo a los datos obtenidos, se determina que la capacitancia  $C$  es (5):

$$C = 403,22 \text{ K Cal} / ^\circ\text{C} \quad (5)$$

El valor de flujo de calor, que provoca la resistencia, al calentar el fluido dentro del tanque es (6):

$$q = 0,358 \text{ K cal} / \text{s} \quad (6)$$

Si la resistencia está apagada, y el sistema está perdiendo calor, se representa la ecuación (7):

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta}{RC} \quad (7)$$

El comportamiento del sistema está descrito por la ecuación (8):

$$\dot{\theta} = -2,949 \times 10^{-3} \theta \quad (8)$$

El comportamiento del sistema cuando la resistencia está encendida, por consiguiente en (9) se define:

$$\dot{\theta} = 0,0886 \times 10^{-3} - 2,949 \times 10^{-3} \theta \quad (9)$$

Parte Discreta

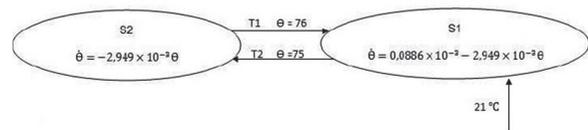
Los estados discretos del sistema son:

- Estado de la resistencia del tanque encendida (S1)
- Estado de la resistencia del tanque apagada (S2)

C. AUTÓMATA FINITO

En el diseño del autómata finito se crean los dos estados en los que se desea que esté el sistema. Se considera que el autómata empieza a funcionar cuando la temperatura inicial sea de 21°C, lo que indica que esta en el estado S1, dentro de éste la resistencia está encendida, y la ecuación que describe el comportamiento del sistema en (9), cabe resaltar que la temperatura del liquido del tanque se incrementa en el estado S1. Cuando la variable alcanza un valor de 75°C, el sistema cambia al estado S2, la resistencia se apaga y, por ende, la ecuación del comportamiento corresponde a (8) y la temperatura desciende. Los estados simulados en Matlab ® se muestra en la Fig. 4.

Fig. 4. AUTÓMATA PARA EL SISTEMA TÉRMICO

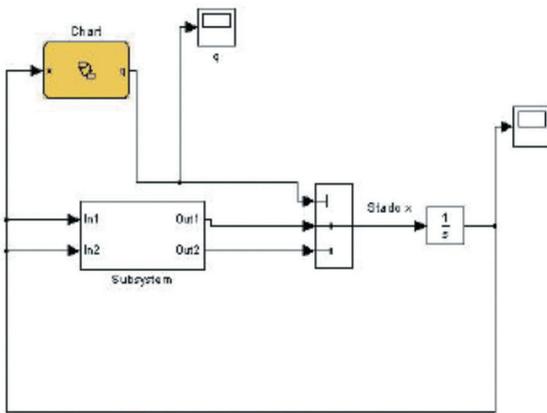


De acuerdo a la condición de la temperatura del medio, el sistema cambia de estado, así se mantiene que la variable temperatura oscile de 75 y 76 grados Celsius en tanque de almacenamiento.

Para la simulación del autómata, se usa Chart, es una herramienta de la librería de Simulink de Matlab ® que permite la simulación de los estados, como se muestra en la Fig. 5.

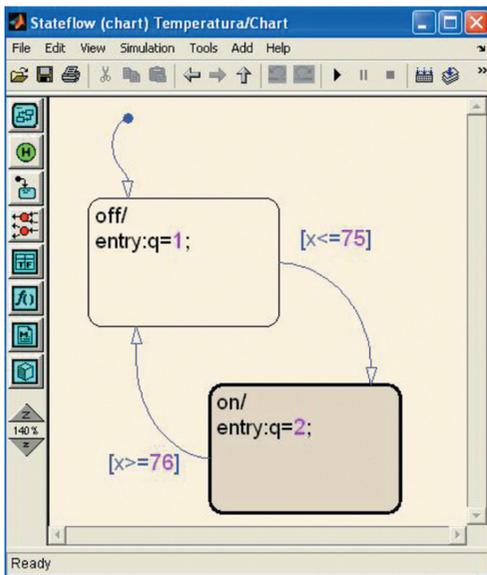
En el bloque de funciones (off/on) se introdujeron las ecuaciones de la parte continua que están en función de  $\dot{\theta}$ , se integran por medio del bloque .

Fig. 5. MODELADO DE AUTÓMATA FINITO



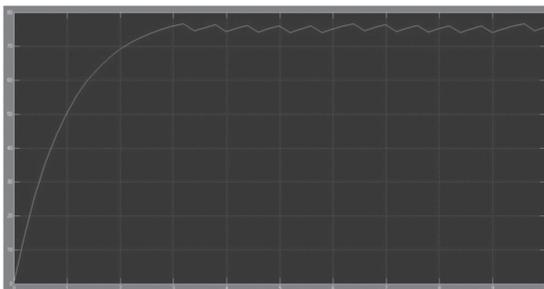
En el bloque de Chart en la Fig. 6 se introduce el autómata y se evalúa si el estado es encendido o apagado.

Fig. 6. BLOQUE DE CHART



La respuesta del sistema térmico con el control de autómatas finitos se observa en la Fig. 7.

Fig. 7. SISTEMA CONTROLADO POR AUTÓMATAS FINITOS



**D. CONTROL PID**

De acuerdo con el modelo de la parte continua, se realizó el control PID del sistema térmico, cuya función de transferencia se muestra en la ecuación (10)

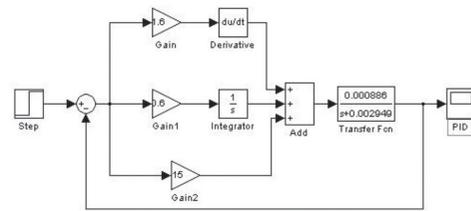
$$G(s) = \frac{0,0000886}{s + 0,002949} \quad (10)$$

Se obtuvieron las siguientes constantes en 11:

$$\begin{aligned} k_p &= 15 \\ k_i &= 0,6 \\ k_d &= 1,6 \end{aligned} \quad (11)$$

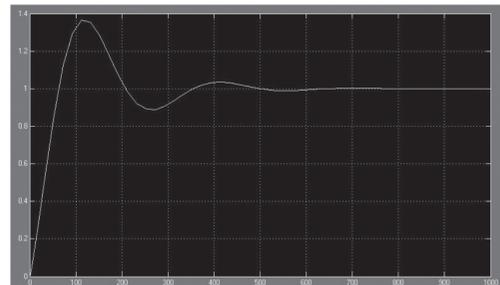
Se simuló en la misma herramienta. Observar Figura 8.

Fig. 8. CONTROLADOR PID MODELADO EN SIMULINK DE MATLAB ®



La respuesta del sistema con el controlador PID es sub-amortiguada, como se muestra en la Fig. 9.

Fig. 9. RESPUESTA DEL SISTEMA TÉRMICO CON CONTROLADOR PID



**III. IMPLEMENTACIÓN EN EL SISTEMA EMBEBIDO**

El control diseñado por autómatas finitos para el tanque de almacenamiento, se implementó en una FPGA Cyclone II de Altera ®. Esta tarjeta tiene la facilidad que tiene su propio software llamado Quartus II, y trabajó bajo el lenguaje de programación VHDL. En este sistema es necesario realizar una secuencia para programar el sistema embebido que se muestra en el Diagrama 1.

DIAGRAMA 1. SECUENCIA DE DISEÑO EN FPGA

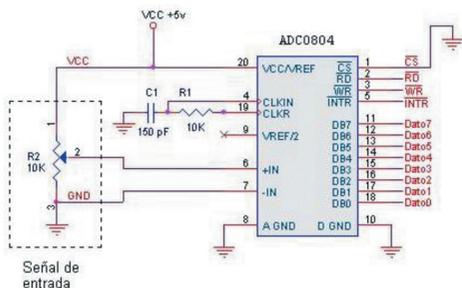


Debido a la aplicación no se realizó la división en módulos ya sea en top-down y bottom-up. Esta metodología consiste, en donde el diseño complejo se divide en diseños más sencillos que se pueden describir más fácilmente. Mientras que la metodología bottom - up consiste en construir un diseño complejo a partir de módulos, ya diseñados más simples. En la práctica, el diseño usa generalmente ambas metodologías [13].

Los datos procedentes del tanque de almacenamiento a la tarjeta, se tienen tanto los digitales (on/off de la resistencia) como los analógicos, que se obtiene de la señal linealizada del sensor PT 100 que tiene una variación de 2,095 V (75 ° C) y 2,340 V (21 ° C), el voltaje y la temperatura son inversamente proporcional.

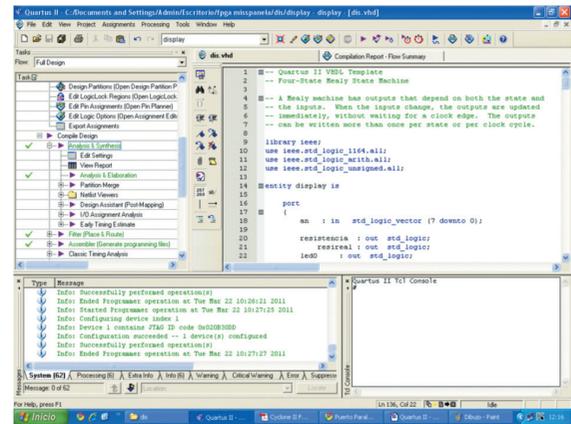
El sistema embebido no tiene convertor ADC, lo cual fue necesario anexar un integrado ADC0804, la implementación se muestra en el esquema de la Fig. 10. Con el convertor se obtiene una señal de 8 bits. Debido a que el cambio es pequeño, se decidió usar como referencia 2,45 V para una mayor sensibilidad. Una vez digitalizado el dato, se procede en realizar el programa. Se crea una señal de salida que dará ON/ OFF de la resistencia térmica. También se añadió 3 vectores: el primero, recepción de la señal digital del convertor, el segundo y el tercero se declaran como salidas, para visualización de la temperatura a todo instante, en un display de 7 segmentos.

Fig. 10. CONVERTOR ADC0804



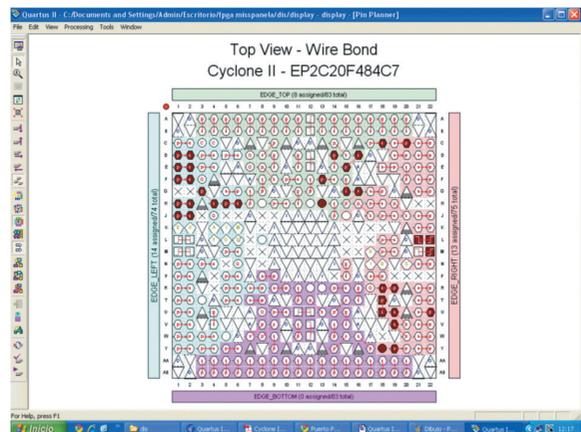
De acuerdo a las etapas definidas, se realiza la síntesis, la compilación del código y se convierte en el lenguaje de acuerdo a la tarjeta que se utiliza. Ver Fig. 11.

Fig. 11 SÍNTESIS DE PROGRAMA



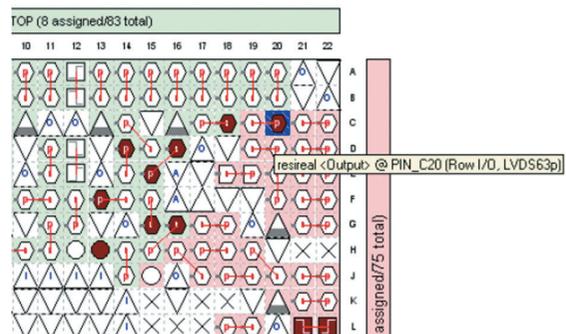
Se procede a hacer la designación de los pines, con Pin Planner (Ver Fig. 12), que permite direccionar cada componente de los vectores.

Fig. 12. PIN PLANNER



Para la asignación de pin de salida, se muestra un ejemplo en la Fig. 13, el cual indica que la resistencia debe encenderse.

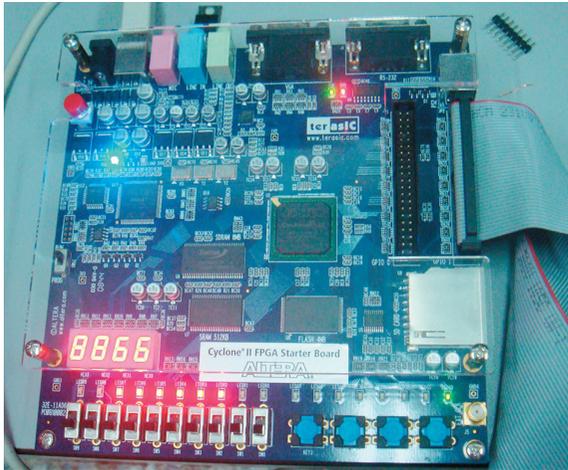
Fig. 13. EJEMPLO DE ASIGNACIÓN DE PINES EN PIN PLANNER



Luego se enruta los pines anteriormente seleccionados, y se genera los archivos con los que se va programar el sistema embebido. Una vez realizado este procedimiento se implementa el control en tarjeta.

Como se muestra en la Fig. 14, en el sistema embebido para este caso en el tanque hay una temperatura de 66 °C y como lo indica el led de color verde la parte inferior derecha de la tarjeta, la resistencia térmica está encendida.

Fig. 14. FPGA EN FUNCIONAMIENTO



#### IV. CONCLUSIONES

La representación del proceso se realizó, teniendo en cuenta la interacción de la dinámica continua y la dinámica a través de eventos, utilizando autómatas finitos.

El control implementado por autómatas finitos, permitió reducir el número de orden de la ecuación diferencial, lo que facilita el análisis del sistema.

Se realizó satisfactoriamente la implementación del control ON/OFF de la resistencia térmica del tanque de almacenamiento, que comparado con el controlador PID el tiempo de respuesta es más efectivo.

Con la simulación realizada se comprueba que en los sistemas híbridos, se puede implementar el autómata finito, y se observa que el cambio de estado del sistema discreto muestra el cambio o el comportamiento de la variable continua que para el caso es la temperatura.

La implementación del control por autómatas finitos en un sistema embebido, no es necesario dedicar un computador para controlar un sistema, ya que estos están específicamente diseñados y

optimizados para resolver un problema en específico.

#### IV REFERENCIAS

- [1] Zhang Si-Bing, Chen Jie, Wang Ya. "A formal verification method of hybrid system and simulation", in Proc. 3<sup>rd</sup> IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology (ICCSIT). Conf., pp. 411-415
- [2] R. Alur, T. Henzinger, G. Lderrriere, and G. Pappas. Discrete Abstractions of hybrid systems. In *Proceedings of IEEE*, volume 88, pages 971-984, 2000.
- [3] Nedialkov N. Mohrenschildt M. "Rigorous Simulation of Hybrid Dynamic Systems with Symbolic and Interval Methods", in Proc. American Control Conference, Proceedings of the 2002. Conf., pp 140-147.
- [4] Fourlas F., Kyriakopoulos K., Vournas C. "Hybrid system modeling for power system", *IEEE Circuits and Systems Magazine*, Vol. 4, no. 3, pp 16-23. Oct. 2004
- [5] Alberto M., Schwer I., Cámara v., Fumero Y. *Matemática Discreta: Con aplicaciones a las ciencias de la programación y computación*, Argentina, Ed. UNL, 2005.
- [6] WOLFRAM S. *A new Kind of Science*, Estados Unidos, Ed. Wolfram Media; 2002.
- [7] HOPCROFT J., MOTWANI R., ULLMAN J. *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación*, España, Ed. ADDISON-WESLEY; 2002.
- [8] CRUZ B., LARA E. Control híbrido de un sistema electromecánico de llenado de botellas. En Congreso Nacional de Control Automático A.M.C.A, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, 24-26 Oct. 2007.
- [9] Cruz B., Avilés J., Lara E. "Diseño de un controlador basado en el modelo del autómata híbrido", *Revista académica de la FI-UADY*, vol.13, no. 2, pp. 5-12, En. / Abr. 2009
- [10] Cruz B. "Modelación y análisis de un sistema híbrido: Un caso de estudio con un sistema de tanques", *Revista Académica de la FI-UADY*, Vol.10, no.2, pp. 5 15. May/ Ag. 2006
- [11] Hruz B., Zhou M. *Modeling and control of discrete-event dynamical systems*, Londres, Ed. Springer-Verlag, 2007
- [12] Wilmschurst T. *An Introduction to the Design of Small Scale Embedded Systems with examples from PIC, 80C51 and 68HC05/08 Microcontrollers*, Gran Bretaña, Ed. Palgrave Foundations, 2003.
- [13] Alonso F., Martínez L., Segovia F. *Introducción a la Ingeniería del Software: Modelos de desarrollo de programas*, España, Ed. Delta Publicaciones, 2005.